山东专升本学霸笔记

高等数学

目录

第一部分　考情分析

第二部分　备考指导

第三部分　高频考点

第一部分

考情分析

第一章　专升本高等数学大纲

第一节　试卷结构与题型

一、考试形式

考试为闭卷、笔试 ,试卷满分为 100 分 ,考试限定用时为 120 分钟 .

二、试卷结构

全卷包括 Ⅰ卷和 Ⅱ卷，Ⅰ卷为选择题，Ⅱ卷为非选择题 .试题题型从以下七种类型中选择:选择题、填空题、判断题、计算题、解答题、应用题和证明题(数 Ⅰ&Ⅱ) .

三、试题难度

试卷主要以中等难度题为主 ,数 Ⅰ、数Ⅱ以及数Ⅲ难度大小为:数 Ⅰ3数Ⅱ3数Ⅲ.

四、考试内容及要求

《 高等数学》科目考试要求考生掌握必要的基本概念 、基础理论 、较熟练的运算能力，在识记 、理解和应用不同层次上达到普通高校专科生高等数学的基本要求，为进一 步学习奠定基础 .

对考试内容的要求由低到高分为了解、理解、掌握、熟练掌握四个层次 ,且高一级的层次要求包含低一级的层次要求 .

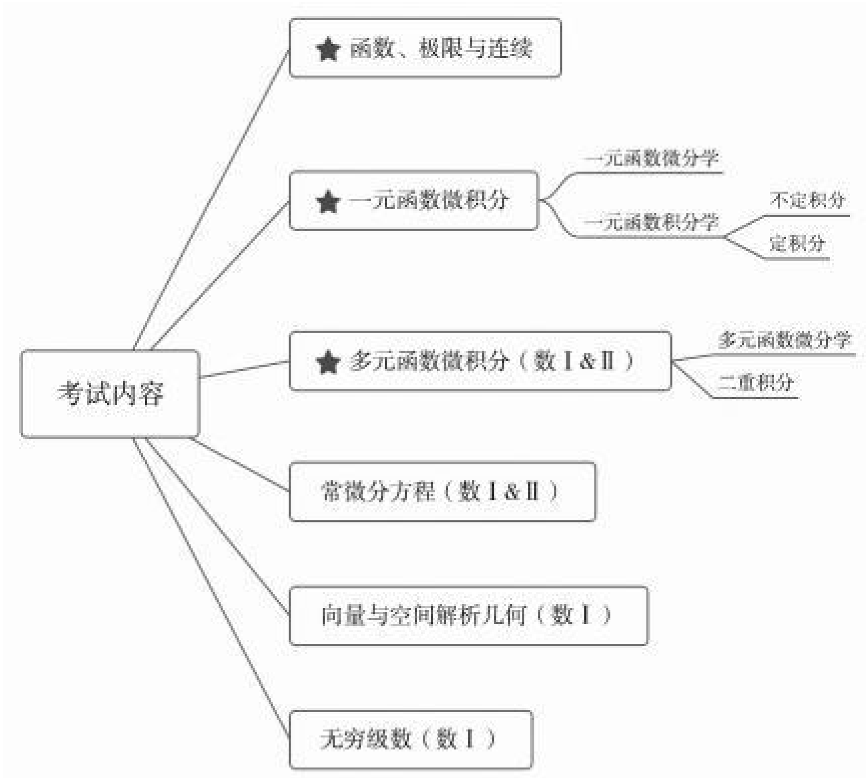
了解(A):对所列知识内容有初步的认识 ,会在有关问题中进行识别和直接应用 .

理解(B):对所列知识内容有理性的认识 ,能够解释、举例或变形、推断 ,并利用所列知识解决简单问题 .

掌握(C):对所列知识内容有较深刻的理性认识 ,形成技能 ,并能利用所列知识解决有关问题 .

熟练掌握(D):系统地把握知识的内在联系 ,并能运用相关知识分析、解决较复杂的或综合性的问题 .

第二节　考试内容


考试内容
★ 函数、极限与连续
★ 一元函数微积分
一元函数微分学
一元函数积分学
不定积分
定积分
★ 多元函数微积分（数Ⅰ&Ⅱ）
多元函数微分学
二重积分
常微分方程（数Ⅰ&Ⅱ）
向量与空间解析几何（数Ⅰ）
无穷级数（数Ⅰ）

第二章　试卷分析

第一节　考试科目及题型题量

高等数学 I试卷题型题量
总分值:100 分
时间:14:00-16:00 ,120 分钟
第一部分　选择题
一、单选题(共 5 题 ,共 15 分)
第二部分　非选择题
二、填空题(共 5 题 ,共 15 分)
三、计算题(共 7 题 ,共 42 分)
四、应用题(共 2 题 ,其中 18 题 6 分 ,19 题 8 分 ,共 14 分)
五、证明题(共 2 题 ,其中 20 题 6 分 ,21 题 8 分 ,共 14 分)

高等数学 I试卷题型题量
总分值:100 分
时间:14:00-16:00 ,120 分钟
第一部分　选择题
一、单选题(共 5 题 ,共 15 分)
第二部分　非选择题
二、填空题(共 5 题 ,共 15 分)
三、计算题(共 8 题 ,共 56 分)
四、应用题(共 1 题 ,共 7 分)
五、证明题(共 1 题 ,共 7 分)

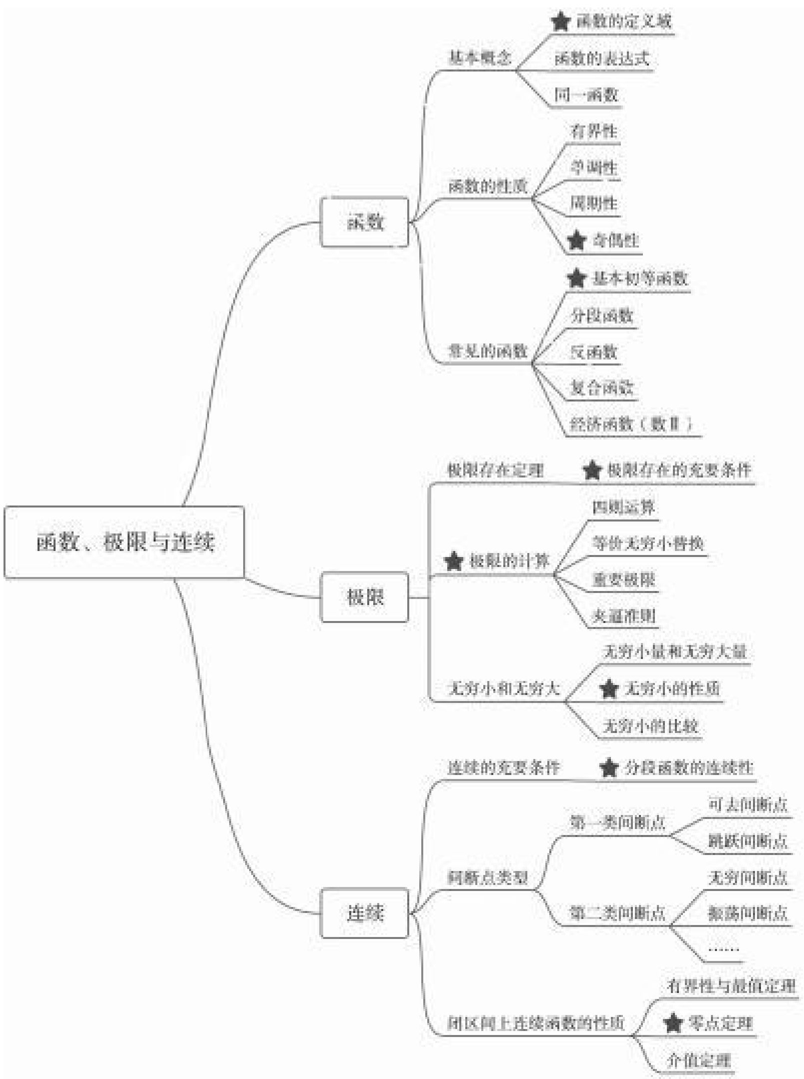
高等数学I试卷题型题量
总分值:100 分
时间:14:00-16:00 ,120 分钟
第一部分　选择题
一、单选题(共 10 题 ,共 30 分)

(续表)

高等数学Ⅰ试卷题型题量
第二部分　非选择题
二、填空题(共 5 题 ,共 15 分)
三、计算题(共 7 题 ,共 42 分)
四、应用题(共 2 题 ,其中 23 题 6 分 ,24 题 7 分 ,共 13 分)

第二节　各章节考查知识点分析

一、函数、极限与连续



总结 昌数 I分值占比达到25%，数Ⅱ分值占比达到 23%，数Ⅲ分值占比达到 39%.函数部分主要以选择题、填空题的形式出现，在极限、连续这两部分主要以计算题、解答题的形式出现.其中函数定义域的计算、函数的性质、极限的计算、无穷小、分段函数的连续性等知识点是考查重点 .

(1)函数部分的主要考查方向为定义域的计算和函数的性质 ,定义域方面考查简单计算能力 ,需要考生在了解常见的自然函数定义域的基础上进行不等式的计算;函数的性质方面主要考查函数奇偶性的判断 .如：

选择题

1.函数f(x)= ^ $\sqrt{4-x^2}$ + +1(x-1)的定义域(　　)

A.[1 ,2]　　　　B.(1 ,2]

C.(-2 ,1)　　　　D.[-2 ,1)

2.函数 y= +1 $\frac{x-1}{x-2}$的定义域是(　　)

A.[1 ,2)　　　　B.(1 ,2)

C.(-n ,1] U[2 , + n)　　　　D.(-n ,1) U(2 , + n)

3.函数f(x) = +1 $\frac{1-x}{1+x}$是(　　)

A.偶函数　　　　B.奇函数

C.非奇非偶函数　　　　D.不确定

(2)极限部分极限计算和无穷小考查频率相对较高 .极限的计算通常以计算题的形式出现 ,需要考生针对不同的极限类型确定不同的极限计算方法;无穷小量这部分通常以选择、填空题的形式出现 ,主要是对无穷小的定义、无穷小的性质、等价无穷小的替换进行考查 ,需要考生对这些知识点进行掌握和记忆 .如：

选择题

1.当 x→0 时 ,以下不是无穷小量的是(　　)

A.si1x　　　　B.cosx

C.+1(1 + x)　　　　D.e-1

填空题

1.极限 $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x}=$ ________ .

计算题

1.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-e^x}$.

2.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\sqrt{1+2x}}$.

(3)连续部分主要考查连续的充要条件和间断点类型 ,连续部分通常以解答题的形式出现 ,其中分段函数连续求参数是考查的重点;间断点部分通常以选择、填空题的形式出现 ,需要考生会找间断点并能够通过求极限判别间断点类型 .如：

填空题

1.已知函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, x\neq 1 \\ 1, x=1 \end{cases}$,则点 x= 1 是 f(x)的 ________ 间断点 .

解答题

1.已知 $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}, x<0 \\ a, x=0 \\ \frac{\ln(1+bx)}{x}, x>0 \end{cases}$ 在 x= 0 处连续 ,求常数 a、b的值 .

2.已知函数 $f(x)=\begin{cases} 2-\cos x, x<0 \\ \frac{a}{2}, x=0 \\ \frac{e^{bx}-1}{x}, x>0 \end{cases}$ 在 x= 0 处连续 ,求常数 a、b的值 .

(4)闭区间上连续函数的性质部分主要考查零点定理 ,数Ⅲ通常以选择题的形式出现 ,数Ⅰ、数Ⅱ通常以证明题的形式出现 ,需要考生会应用零点定理证明区间上根的存在性 .如：

选择题

1.方程 $x^3+x-1=0$ 至少有一个实根的区间是(　　)

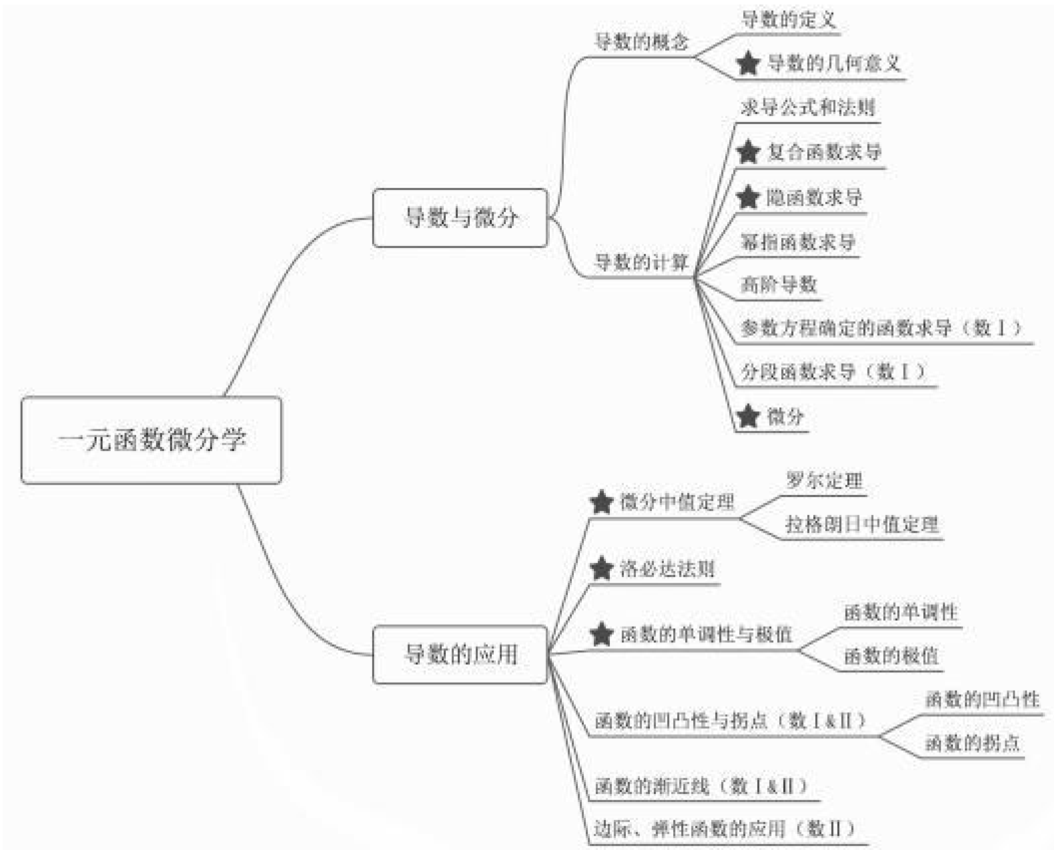
A.(-3 ,-2)　　　　B.(-2 ,-1)

C.(-1 ,0)　　　　　　　　　　D.(0 ,1)

证明题

1.(数 I&Ⅱ)证明方程 $x.3^x$-x-1 =0 在(0 ,3)上至少有一个根 .

二、一元函数微分学



总结 昌数 I分值占比达到 17%,数Ⅱ分值占比达到 27%,数Ⅲ分值占比达到 30%.考查形式覆盖所有题型 ,导数的计算主要以计算题的形式出现 ,其中数Ⅱ应用题通常考查本章经济学函数部分 ,数 I与数Ⅱ证明题通常考查本章微分中值定理部分 ,此章节会为后面的多元函数微分学奠定基础 .其中导数的几何意义、复合函数求导、隐函数求导、微分、微分中值定理、洛必达法则、函数的单调性与极值为本章节的考查重点 .

(1)导数的几何意义这个知识点主要有两个考查方向 ,一是给出切点让考生去确定切线斜率以及切线方程等;二是给切线斜率让考生去确定切点 .所以需要考生对函数求导公式和各类函数的求导方法熟练掌握 .如：

填空题

1.曲线$y=\frac{1}{2}e^{2x}$在点$\left(0,\frac{1}{2}\right)$处切线的斜率k=__________ .

2.y=2+1(2x)在$(x_0,2+1(2x_0))$处的切线与直线 2x-y＋1 =0 平行 ,求 x_0=__________ .

3.y=+1(1＋x)在点(0 ,0)点处的切线方程为__________.

(2)复合函数求导与隐函数、幂指函数、微分等其他知识点通常会结合到一起来考查 ,考查类型主要是选择、填空或者计算题的形式 ,需要考生熟练掌握对这些导数的计算 .如：

选择题

1 . 函数 y= si1 2 x在点x= $\frac{m}{2}$处的导数是(　　　)

A.-1　　　　B.1

C.-2　　　　D.2

2.y=si1₂x,则 $dy|_{x=\frac{\pi}{4}}$ =(　　　)

A.$\wedge\sqrt{2}\,dx$　　　　B.$\wedge\sqrt{2}$

C.dx　　　　D.1

填空题

1.若函数 y=y(x)由方程 $y=1+xe^{y}$确定 ,则 y' =__________ .

计算题

1.求函数 $y=x^{si1\,x}$(x30)的导数 .

2.已知 y=+1cos3x,求 dy.

(3)洛必达法则通常以计算题的形式考查 ,考生需要会用洛必达法则求解未定式的极限 ,并且能够结合第一章求解函数极限的方法进行计算 。如：

计算题

1.求极限$+im_{x\to 0}\frac{e^{x}si1x-1}{x^2}$.

2.求极限$+im_{x\to 0}\frac{e^{x}x-1}{xta1x}$.

3.求极限$+im_{x\to 0}\frac{x-si1\,x}{(e^{x^2}-1)si1x}$.

(4)微分中值定理数 Ⅰ、数Ⅱ通常以证明题的形式考查 ,考生需要会用定理解决相关的问

题;数Ⅲ通常以选择、填空题的形式出现 ,需要考生掌握对两个定理的简单应用 .如：

选择题

1.函数 $y=+1(x+1)$在区间[0 ,1]上满足拉格朗日中值定理的 ∈是(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　　　B. $\frac{1}{\ln 2}$

C. $\frac{1}{2\ln 2}$　　　　D. $\frac{1}{\ln 2}-1$

证明题

1.(数 I&Ⅱ)设函数f(x)在闭区间[0 ,m] 上连续 ,在开区间(0 ,m)内可导 ,证明在开区间(0 ,m)内至少存在一点 ∈,使得f'(∈)si1∈=-f(∈)cos∈.

2.(数 I&Ⅱ)证明不等式: $\frac{m-n}{m}<+1\frac{m}{n}<\frac{m-n}{n}$, 其中 $n<m$为正整数 .

(5)函数的单调性和极值通常以选择、填空或解答题的形式考查 ,考生需要具备确定函数单调区间以及极值的能力 .如：

填空题

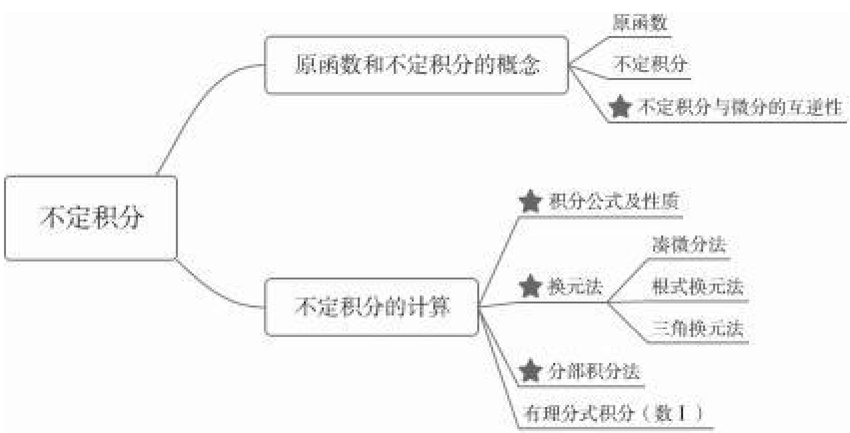
1.函数 $y=x^3-x^2-x+7$ 的单调递减区间为__________.

2.函数$y=xe^x$ 的单调递增区间为__________.

计算题

1.求 $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{1}{3}$的极值 .

三、一元函数的不定积分



总结 。数 I分值占比达到6%,数Ⅱ分值占比达到7%,数Ⅲ分值占比达到 9%.其中不定积

分与微分运算的互逆性以及不定积分的计算为考查重点 .不定积分的计算为后面定积分的学习起到了一个非常重要的铺垫作用 .考查方式通常以选择、填空或计算题的形式考查 .

(1)考生在掌握不定积分与微分运算互逆性的基础上还要注意一些细节的把握 .如：

选择题

1.下列等式正确的是(　　)

A. $\int f'(x)dx=f(x)$　　　　B. $\left[\int f(x)dx\right]'=f(x)+C$

C. $d\int f(x)dx=f(x)$　　　　D. $d\int f(x)dx=f(x)dx$

(2)在不定积分的计算方面 ,需要考生在不定积分计算过程中针对不同的被积函数确定其相应的计算方法 .如：

选择题

1. $\int \cos x dx=$(　　)

A.-si1x + C　　B.si1x + C　　C.si1x　　D.-si1x

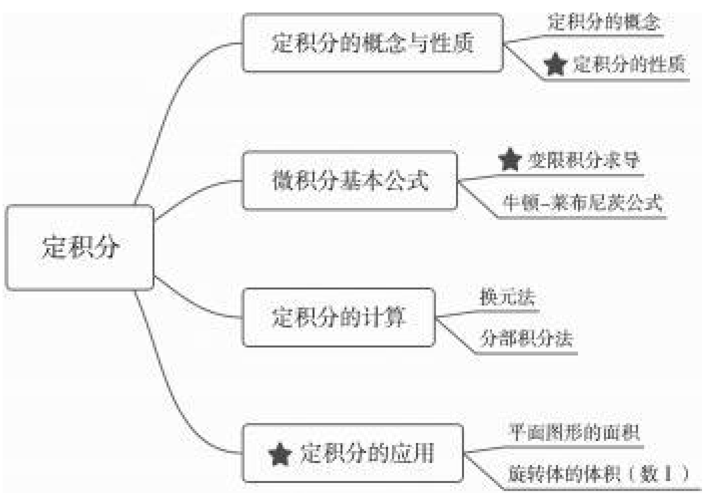
填空题

1.已知f(x)的一个原函数为 $^{\wedge}\sqrt{x+1}$,则 $\int f(x)dx=$________ .

2. $\int +1xdx=$________ .

3.不定积分 $\int xe^{x}dx=$________ .

四、一元函数的定积分



总结 :数 I分值占比达到 10%,数Ⅱ分值占比达到 13%,数Ⅲ分值占比达到 22%.其中定积分的计算与定积分的几何应用成为考查重点 .定积分的计算主要还是基于不定积分的计算基础之上 ,再利用牛顿— 莱布尼茨公式进行代数运算 .考查方式通常以选择题和填空题以及解答题为主 .

(1)定积分计算过程中 ,考生需要根据不定积分的计算方法类比推出定积分的计算方法 .针对变限积分的计算 ,考生只需熟记变限积分的计算公式即可 .如：

选择题

1. $\int_{1}^{4}\frac{1}{x(1+\sqrt{x})}dx=(\quad)$

A.2+1 $\frac{4}{3}$　　B.+1 $\frac{4}{3}$　　C.2+1 $\frac{3}{4}$　　D.+1 $\frac{3}{4}$

2. $\int_{0}^{m}x\cos x dx=(\quad)$

A.0　　B.1　　C.-1　　D.-2

3.定积分 $\int_{0}^{\frac{m}{4}}\frac{x}{1+\cos 2x}dx=(\quad)$.

A. $\frac{m}{4}-\frac{1}{2}+1\,2$　　B. $\frac{m}{4}+\frac{1}{2}+12$

C. $\frac{m}{8}-\frac{1}{4}+1\,2$　　D. $\frac{m}{8}+\frac{1}{4}+12$

填空题

1. $\int_{0}^{1}\wedge/^{2}1-xdx=$________ .

2. $+\underset{x\to 0}{im}\frac{\int_{0}^{x}(e芒^{2}-1)d芒}{x^{3}}=$_________ .

3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{m}{2}}\frac{1}{1+\cos x}dx=$________ .

(2)考生在掌握定积分的计算基础上还要掌握利用定积分计算封闭图形的面积以及封闭图形绕两坐标轴所得旋转体的体积(数Ⅰ) .如：

应用题

1.设直线 y=x,x=2 ,y=0 与曲线 $y=\frac{1}{x}$ (x30)所围成的平面图形为 D.

(1)求 D的面积 S；

(2)(数Ⅰ)求 D绕 x轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

2.设直线 $y=2-x, y=0$ 与曲线 $y=x^2(x\geq0)$所围成的平面图形为 D.

(1)求 D的面积 S；

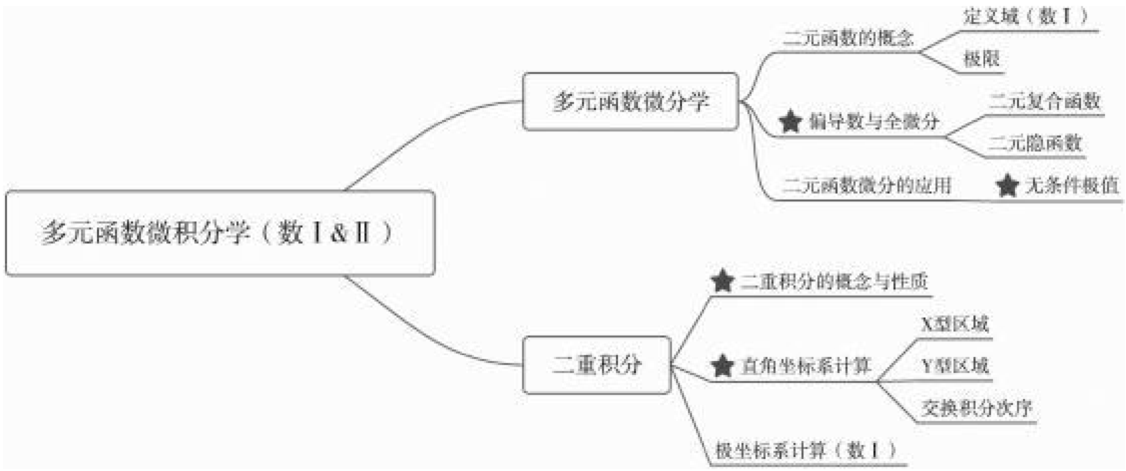
(2)(数Ⅰ)求 D绕 x轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

3.设曲线 $y=e^{-x}, y=x^2+1(x\geq0)$ 与直线x=1 所围成的平面图形为 D.

(1)求 D的面积 S；

(2)(数Ⅰ)求 D绕 x轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

五、多元函数微积分学（数 I&Ⅱ）



总结 :数 I分值占比达到 15%,数Ⅱ分值占比达到 20%.多元函数微积分在高等数学中也是很重要的章节 ,在前面一元函数的微积分的基础之上 ,主要考查二元函数偏导数的求法、偏导数的简单应用以及二重积分的计算 .考查方式以选择、填空或解答题为主 .

(1)在这部分主要需要掌握的是二元函数偏导数、全微分的求法以及二元函数求极值的综合问题 .此类问题可以根据一元函数微积分进行类比学习 .如：

选择题

1.设 $z=+1(u^2+⑦^2)$,$u=x^2-y$,$⑦=x+y^2$,则$\frac{a\,z}{a\,x}$=(　　)

A. $\frac{4xu}{u^2+⑦^2}$　　B. $\frac{4xu+2⑦}{u^2+⑦^2}$

C. $\frac{4yu}{u^2+⑦^2}$　　D. $\frac{4yu+2u}{u^2+⑦^2}$

2.已知函数 z=z(x,y)由方程 $z^3-3yz+x^3-2=0$ 所确定 ,则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1,y=0}$ =(　　)

A.-1　　　　B.0

C.1　　　　D.2

填空题

1.函数 $z=e^{2x-y}$的全微分 dz=__________ .

2.函数 z=+1(3x-y)的全微分 dz=__________ .

3.z=si1(x_2-2y) ,则 dz=__________ .

解答题

1.求二元函数 $f(x,y)=x^3-y^3-3x^2+3y^2-1$ 所有的极值点和极值 .

2.求二元函数 $f(x,y)=x^4+4xy+2y^2$ 所有的极值点和极值 .

3.求 $f(x,y)=4xy^2-x^2-\frac{1}{2}y^2$ 的所有极值点和极值 .

(2)二重积分的考查方向有直角坐标系中的计算、二重积分交换积分次序以及极坐标系中的计算(数Ⅰ) ,考查形式以计算题为主 .如：

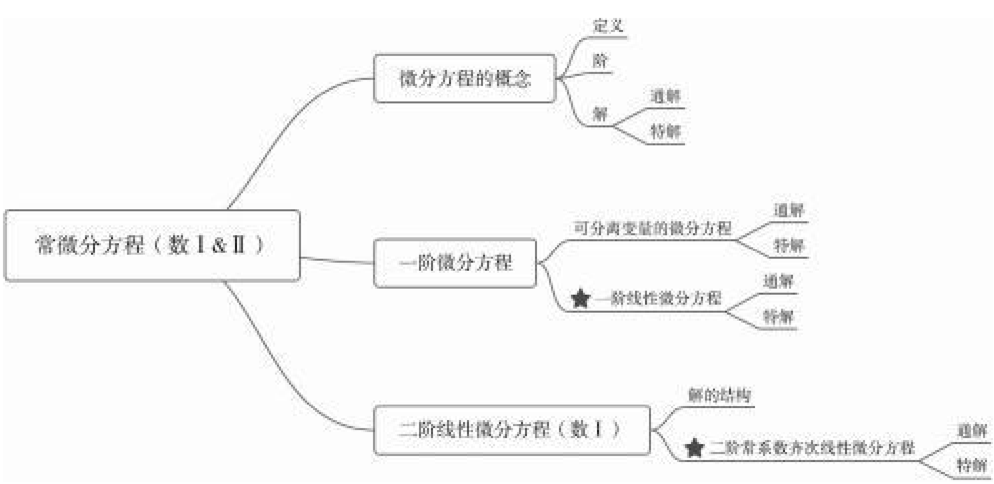
填空题

1.计算 $\iint\limits_D x\,dxdy$,其中D是由y=1 ,y=x,x=2 所围成的闭区域 .

2.求 $\iint\limits_D ye^{xy}dxdy$,其中D是由xy=1 ,x=2 ,y=1 所围成区域 .

3.(数I)计算二重积分 $\iint\limits_D \wedge\sqrt{x^2+y^2}\,d\alpha$,其中D是由圆 $x^2+y^2=3$ 所围成的闭区域 .

六、常微分方程 (数 I&Ⅱ)



总结 昌数 I分值占比达到9%,数Ⅱ分值占比达到 10%.本章节要求考生会利用不定积分的方法来求解微分方程 ,在考试中主要以选择题、填空题和解答题的形式去考查可分离变量的微分方程、一阶线性微分方程和二阶常系数齐次线性微分方程(数Ⅰ)的通解及特解 .

解答题

1.求微分方程 $y'-xy=0$ 的通解 .

2.求微分方程 $2y'-3\sqrt{x}y$ =0 的通解 .

3.求微分方程 $y'-(x+1)y=0$ 的通解 .

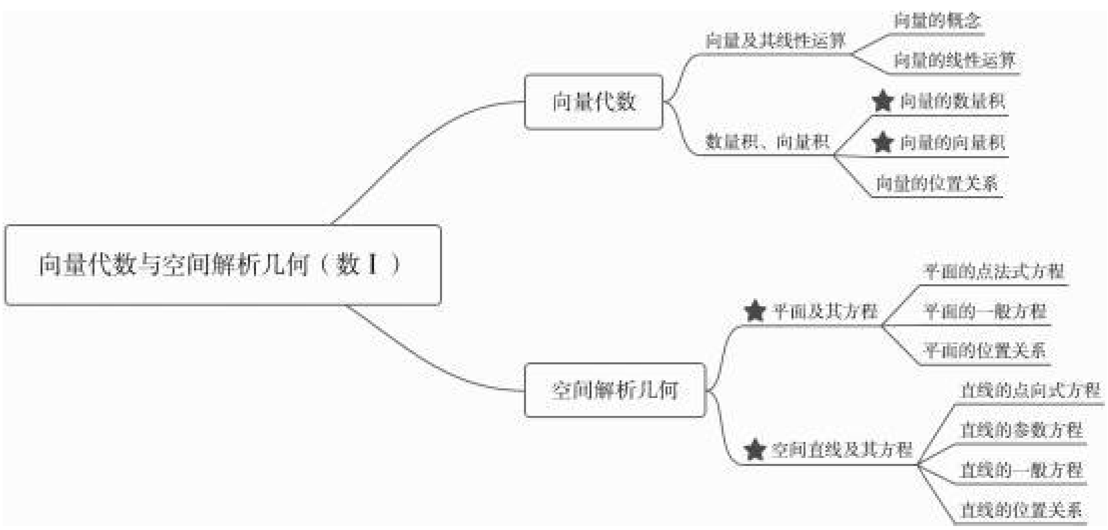
4.(数Ⅰ)

(1)求微分方程 $y''-3y'-4y=0$ 满足初始条件 $y(0)=0$,$y'(0)=5$ 的特解 .

(2)求微分方程 $y''-y'-6y=0$ 满足初始条件 $y(0)=1$,$y'(0)=-7$ 的特解 .

(3)求微分方程 $y''-4y'+3y=0$ 满足初始条件 $y(0)=6$,$y'(0)=10$ 的特解 .

七、向量代数与空间解析几何 (数Ⅰ)



总结 昌分值占比达到 12%,本章节中的空间解析几何作为考试重点 ,主要考查空间平面和空间直线的方程 ,主要以解答题的方式考查 .而向量代数的数量积、向量积以及简单的线性运算部分则以选择题、填空题的形式考查 .

(1)考生在这部分需要掌握的是向量的基本概念、简单的线性运算、向量的数量积和向量积 .如 :

填空题

1.已知向量 a =| 1 ,-1 ,入! ,b=|2 ,1 ,-2! ,若 a .b=3 ,则实数 入的值为__________.

2.设已知两点 $M_1(2:2\sqrt{2})$ 、$M_2(1:3:0)$:则向量的模 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$ =________ .

3.设向量 a =6i + 3j + 2k :若 a 与 b 平行 :且 | b | =14 :则 b=________ .

(2)对于空间平面和空间直线方程求解以及直线和平面位置关系的问题绝大多数是以解答题的形式进行考查 :在选择题或者填空题中也会考查部分内容 .如 :

选择题

1.已知向量 a =(2 :-49 :1) :b =(-3 :10 :-1) :若向量(1 :0 :-1)与 入a + μb 垂直 :则(　　)

A.2入=μ　　　　B.2入=-μ

C.入=2μ　　　　D.入=-2μ

2.已知向量 a :b 满足 a1b :且 | a | =3 : | b | =4 :则 | (a + b)x(a-b) | =(　　)

A.0　　　　B.12

C.24　　　　D.30

3.设向量 a :b 满足 | b | = $\sqrt{3}$: | a-b | =1 :且 a 与 b 的夹角为 $\frac{m}{6}$:则 | a | =(　　)

A.1　　　　B. $\sqrt{3}$

C.2　　　　D.1 或 2

填空题

1.若直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{k}=\frac{z-3}{2}$ 与平面 x-3y + 4z-2 =0 平行 :则 k=__________ .

2.空间中过点(-1 :0 :1)且与平面 2x-y + 3z=0 垂直的直线方程是__________.

3 . 过直线 l_1 : $\frac{x-3}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{2}$ 和直线 l_2 : $\begin{cases} x=3t-3 \\ y=t+2 \\ z=2t-3 \end{cases}$ (t为参数)的平面方程为________________.

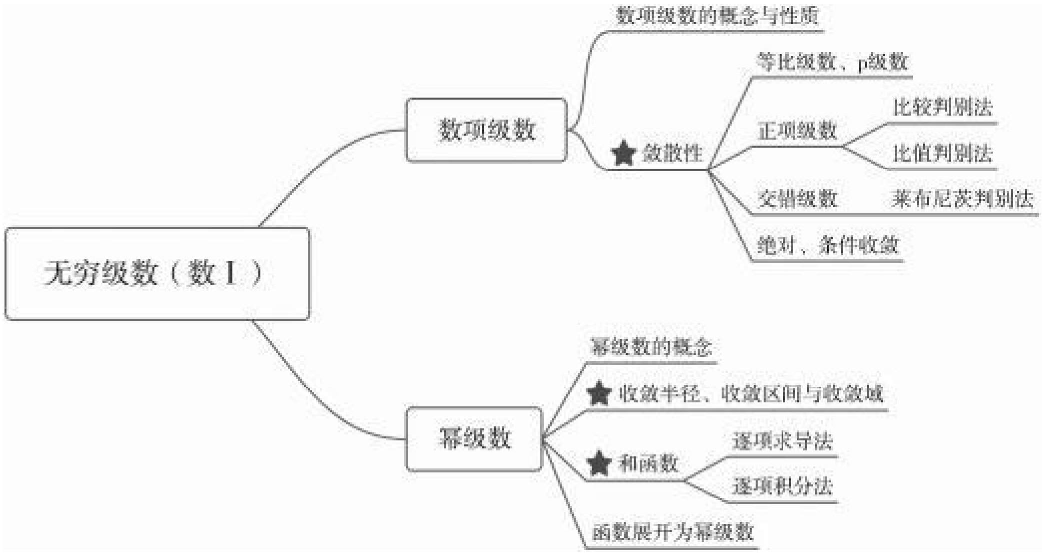
解答题

1.直线 L 过点(1 :-2 :-1) :且与 $\begin{cases} \pi_1: & x+2y-z=0 \\ \pi_2: & 2x-3y+5z=6 \end{cases}$ 平行 :求直线 L 的方程 .

2.求过点(0 :0 :1)及直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$ 的平面方程 .

3 . 求过直线 L_1 : $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=3t+2 \\ z=2t-3 \end{cases}$ (t为参数)和直线 L_2 : $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{2}$ 的平面 m的方程 .

八、无穷级数（数Ⅰ）



总结 昌分值占比 6%,数项级数部分重点考查敛散性的判别 ,主要以选择题的形式出现，需要考生掌握级数敛散性的判别方法 ;幂级数部分重点考查求收敛半径、收敛域与收敛域，以及通过逐项求导、逐项积分法求和函数 ,主要以填空、解答题的形式出现 .

(1)考生在需要掌握常数项级数的性质及正项级数、交错级数的判别法等内容 ,会判断级数的敛散性 .如：

选择题

1.下列级数中收敛的级数是(　　)

A. $\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{3^n}$　　　　B. $\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{n+1}$

C. $\sum_{n=1}^{n}\frac{3^n}{2^n}$　　　　D. $\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

2.下列级数中收敛的是(　　)

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2}$　　　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

C. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$　　　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{3^n}$

(2)考生在需要会利用逐项求导、逐项积分法求和函数 ,以及掌握常见的麦克劳林展开式，将函数展开为幂级数 .如：

解答题

1.求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n}$的收敛区间．

2.求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n+2}x^n$的收敛半径与收敛域．

3.求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}$的和函数．

4.求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$的收敛区间，并求和函数．

5.把 $y=\frac{1}{2-x}$展开为x的幂级数．

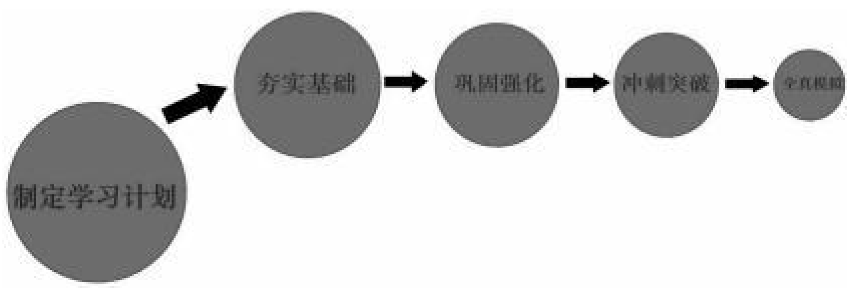
第二部分

备考指导

从试卷结构上来看主要考查微积分知识(一元函数微积分、多元函数微积分、常微分方程、无穷级数) 、空间解析几何(向量、空间直线方程、空间平面方程) 的基本概念与基本理论 ,要求考生掌握或学会各部分的基本方法;注意各部分知识的结构以及知识的内在联系;应具有一定的运算能力、逻辑推理能力、空间想象能力和抽象思维能力 .微积分部分注重考查运算能力和逻辑推理能力;而向量代数和空间解析几何则考查空间想象能力 .

内容	微积分	向量代数与空间解析几何
识记	☆☆☆	☆☆
理解	☆☆	☆☆
运用	☆	☆

备考可分为以下五个阶段:



第一 阶段　了解考情 ,制定学习计划

系统性的学习需要在开始备考之前制定一个周密的备考计划 .例如通过查看考试公告，了解报名时间、考试时间、考试地点等基本信息 .研读考试大纲了解考试内容、考试难度、题型题量等考情信息 ,然后再依据备考的周期和学习内容为自己制定一个合理的备考计划，明确阶段性目标 ,提高学习的效率 .

第二阶段　全面系统梳理知识 ,夯实基础

一、微积分

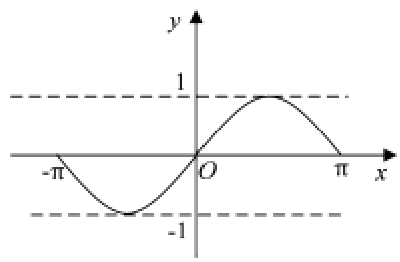
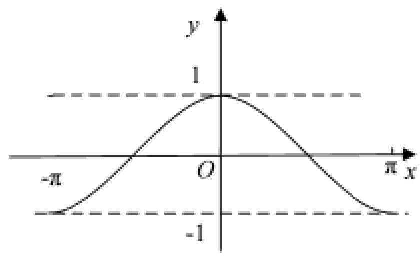
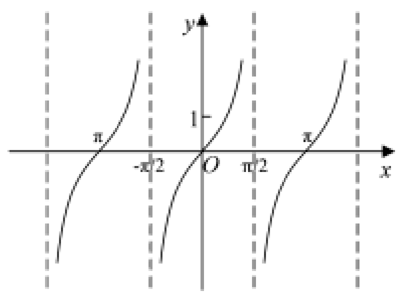
1.学习内容

包括函数极限与连续、一元函数微分、一元函数积分、多元函数微分、多元函数积分、常微

分方程以及无穷级数七大章节的系统性学习 ,重点梳理 ,巩固基础知识 ,完成对概念的理解以及对简单题目的计算 .

2.学习方法

(1)函数是高等数学的研究对象 ,所以对函数相关定义的理解以及对常见基本函数的表达形式、图像、性质的识记就尤为重要 ,在学习时可将六类基本初等函数总结实现表格化帮助记忆 .例如:将常见的三角函数表格化记忆

解析式	图像	性质
正弦函数 y=si1x		(1) 定义域:R; (2) 值域: [-1 , 1] ;(3)奇函数;(4)周期:2m
余弦函数 y=cosx		(1) 定义域:R; (2) 值域: [-1 , 1] ;(3)偶函数;(4)周期:2m
正切函数 y=ta1x		(1)定义域:x≠ $\frac{m}{2}$+ km; (2) 值域:R;(3)奇函数;(4)周期:m

(2)极限是微分和积分的基础 ,而一元函数微积分是多元函数微积分的基础 ,重要的思想和概念在极限这一章就会体现出来 ,所以在这一部分一定要注重对极限概念的掌握 ,勤于总结归类解题方法与记忆的口诀 .例如:

常见等价无穷小的替换一三对两特殊

当 x→0 时,

三对:si1x~x;arcsi1x~x;ta1x~x;arcta1x~x;+1(x+1)~x;e^x-1 ~x;

两特殊:1-cosx~$\frac{1}{2}x^2$;^$\sqrt{1+x}$ -1 ~$\frac{1}{2}$x.

求极值方法:

①求出f(x)的定义域;

②求出导数f'(x);

③求出f(x)的全部驻点与不可导点;

④考查f'(x)的符号在每个驻点或不可导点的左、右邻近的情形，以确定该点是否为极值点;如果是极值点，进一步确定是极大值点还是极小值点;

求区间 I上的连续曲线 y=f(x)的拐点的步骤(数 I& I)：

①求出f(x)的定义域;

②求f”(x);

③令f”(x)=0，解出这方程在区间 I内的实根，并求出在区间 I内f”(x)不存在的点;

④对于③中求出的每一个实根或二阶导数不存在的点 x_0,检查f”(x) 在x_0左、右两侧邻近的符号，那么当两侧的符号相反时，点(x_0,f(x_0)) 是拐点，当两侧的符号相同时，点(x_0,f(x_0))不是拐点 .

(3)在许多问题中，往往不能直接找出所需要的函数关系，但是根据问题所提供的情况，有时可以列出含有要求的函数及其导数的关系式，这样的关系式就是所谓微分方程，微分方程建立以后，对它进行研究找出未知函数来，这就是解微分方程 .初次学习此部分需要需要总结归类的去识记一些微分方程的基本概念和常用的微分方程的解法 .例：

可分离变量的微分方程(数 I& I)

如果一阶微分方程能写成$\frac{dy}{dx}$=p(x)g(y)的形式，则称为可分离变量的微分方程 .

可分离变量的微分方程的解题步骤:

步骤一 :先分离变量，得$\frac{1}{q(y)}$dy=p(x)dx;

步骤二:将上式等号两端同时不定积分，得$\int \frac{1}{q(y)}dy=\int p(x)dx$;

步骤三:计算不定积分，并化简 .

一 阶线性微分方程(数 I& I)

如果一阶微分方程可化成$\frac{dy}{dx}$+ P(x)y= 0(x)的形式 ,则称为一阶线性方程 .如果 0(x)= 0 ,则方程称为齐次的;如果 0(x)≠0 ,则方程称为非齐次的 .

一阶线性微分方程通解公式:

$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int 0(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$.

二阶常系数齐次线性常微分方程(数 I)

形如 y” + py' + gy=0 的微分方程 ,称为二阶常系数齐次线性常微分方程 .

二阶常系数齐次线性常微分方程的解题步骤:

步骤一:方程 y” + py' + gy=0 的特征方程为 r^2 + pr + g=0 ;

步骤二:求出特征方程为 r^2 + pr + g= 0 的两个根 r_1,r_2;

步骤三: (i)特征方程有两个不相等的实根:$r_1 \neq r_2$,微分方程的通解为 $y= C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$;

(ii)特征方程有两个相等的实根:$r_1 = r_2 = r$,微分方程的通解为 $y= (C_1 + C_2x)e^{rx}$;

(iii)特征方程有一对共轭复根:$r_1 = \alpha + 8i, r_2 = \alpha - 8i$,微分方程的通解为

$y= e^{\alpha x}(C_1\cos 8x + C_2\mathrm{si}18x)$.

(4)对于无穷级数的学习 ,需要总结归类题型以及做题方法 。例 :

求幂级数的收敛半径(数 I)

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$,有$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ =p,(或$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ =p)

若 p≠0 ,则 $R=\frac{1}{p}$;

若 p=0 ,则 R= + n;

若 p= + n ,则 R=0.

二、向量代数与空间解析几何 (数 I)

1.学习内容

向量代数的数量积、向量积和简单的线性运算、空间平面方程、空间直线方程

2.学习方法

正像平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可或缺的一样 ,空间解析几何的知

识对学习多元函数微积分也是必要的 ,此部分需要了解向量的概念 ,根据向量的运算建立空间坐标系 ,利用坐标讨论向量的运算 ,进而将向量作为研究空间解析几何的工具 ,初次学习需要发挥空间想象能力 ,有关联的记忆空间直线与平面的方程 ,掌握解题要点 .例：

直线的点向式方程

已知直线 L 上一点 皿$_0$ (x_0,y_0,z_0)和它的一方向向量 $s=(m,n,p)$,那么直线 L 的对称式方程或点向式方程为

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

设$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=$芒,可得直线的参数方程

$$\begin{cases} x=x_0+m芒 \\ y=y_0+n芒 \\ z=z_0+p芒 \end{cases}.$$

了解各方程之间的关系与来源可以大大减少我们记忆内容的量 .考生要确保学习完每一章每一节的知识点后 ,还要有一定量的配套课后练习题进行巩固训练 ,加深对知识点的印象 .在整个系统学习过程中 ,考生还要做到定期回顾知识点和错题的整理 ,高等数学内容和细节较多 ,一段时间过后容易淡忘 ,定期进行知识点的回顾梳理是必不可少的 .另一方面 ,对做过的错题进行整理 ,不仅能够很好地加深考生对知识点的印象 ,而且也能锻炼考生的做题效率 .

第三阶段　强化练习 ,稳步提升

在强化阶段 ,就需要对基础阶段中所学习的知识点深刻理解与识记 ,将这些知识点(包括基本公式和解题方法)转化成为考生自己的做题能力 .考生需要通过大量的专项练习题进行对知识点的巩固与掌握 ,将理论运用于解决实际问题 ,从而能够达到查漏补缺 ,弥补考生自身薄弱之处 ,锻炼考生的题感 ,进一步提升做题的效率 .

一、微积分

1.学习重点

针对各个模块、按照章节进行专项训练 ,通过各种题型进行练习 .

2.学习方法

题海训练是检验学习效果和巩固提升的重要阶段，通过做题不断积累知识，明确答题思路，总结做题技巧，提升答题速度.

在此阶段要注意 3

①在练习的过程中，一定要独立作答，在规定时限内将答案完整地写在答题纸上，然后再与答案进行比对.

②进行错题整理，将一些易错易混点记录下来，找到出错原因，并通过反复练习逐渐克服自己的缺陷.在平时训练时要注意总结综合题的答题方法和答题技巧，随时翻看.

③总结各种题型的答题技巧，进行总结归纳，形成答题思路和解题步骤.提高答案组织的准确性、条理性和层次性.

④加强识别考点能力的训练.从历年考试中可以看到，无论是客观题还是主观题，基本上每年的考点相对较固定，所以识别考点能力的提升十分重要，平时在做题训练中先思考考点、涉及方法从而依题目分析做题思路及方法.

二、向量代数与空间解析几何

1.学习重点

针对各个模块、按照章节进行专项训练，通过各种题型进行练习.

2.学习方法

这一章节主要考查空间思维能力，考生如果在这一部分出现问题，可以通过画图的方法，确定向量之间的关系，再根据题意进行计算.这就要求考生在平时的学习和题海训练过程中提高画图意识，见到空间解析几何的题目就着手根据题目画图从而分析题目得到解题思路.

第四阶段　查漏补缺,逐个击破

在这一阶段再一次根据考试大纲巩固串联知识点，确保万无一失，同时在这一阶段可以钻研高质量的模拟卷和近三年的历年真题，把握出题规律，抓住高频考点，从而达到精准提分.考生可利用模拟卷或历年真题卷根据实际考试要求在规定时间内自行进行模拟考试，并将模拟考试中不会的题和做错的题进行汇总，对照着考查的知识点重新进行一次查漏补缺.反复多次的模拟考，也可以让考生更加从容地面对考试.

一、微积分

1.学习重点

回归教材 ,结合真题 ,将系统知识进行前后梳理、整合 ,一元函数微积分是高数的考查重点 ,应着重进行巩固 ,查漏补缺 .各章节重点如下:

函数极限与连续

定义域、函数性质、极限计算、无穷小、连续的充要条件 .

一元函数微积分

导数的几何意义、复合函数求导、导数四则运算、微分、单调性、极值 .一元函数不定积分与微分运算的互逆性、不定积分的计算、微积分基本公式、定积分应用 .

多元函数微积分(数 I&I)

二元函数偏导数、全微分、二元函数求极值、二重积分 .

常微分方程(数 I&I)

可分离变量的微分方程、一阶线性微分方程通解的计算、二阶常系数齐次线性微分方程特解的计算(数 I) .

无穷级数(数 I)

判断常数项级数的敛散性、幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域、和函数、函数展开为幂级数 .

2.学习方法

综合分析各知识点的联系 ,将知识点串联起来识记学习 .加强知识之间的联系性 ,通过图表和对比的方式进行总结和归纳 .总结记忆的方法和规律 .

二、向量代数与空间解析几何

1.学习重点

回归教材 ,结合真题 ,着重学习求解空间平面方程与空间直线方程 .

2.学习方法

结合历年真题 ,把握出题规律与核心考点 ,针对性学习 .

第三部分

高频考点

考点一　函数

一、定义域

常见具体函数的定义域:

(1)$y=\frac{1}{x}$ xe (-n ,0) U(0 , + n)　　(2)y= ^ $\sqrt{x}$,xe [0 , + n)

(3)y= + og$_a$x,xe (0 , + n)　　(4)y=ta1x, $\left\{ x|x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z \right\}$

(5)y=arcsi1x,xe [-1 ,1]　　(6)y=arcosx,xe [-1 ,1]

[2021数I】函数f(x)= + 1(2-x)的定义域(　　)

A.[2 , + n)　　B.(2 , + n)

C.(-n ,2]　　D.(-n ,2)

[答案】D

[解析】由 2-x30 ,得 x<2 ,所以定义域为(-n ,2) .

二、函数解析式

1.直接代入法求解析式

已知 y=f(u)和 u =业(x)求f[业(x)] ,用直接代入法 .

2.换元法求解析式

已知f[业(x)]求f(u) ,用换元法 .

[2021数I】已知函数$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & |x|>1 \\ 0, & |x|\leqslant 1\end{cases}$,则f[f(2021)] =　　　　.

[答案】0

[解析】$f(2021)=\frac{1}{2021}$, $f[f(2021)]=f(\frac{1}{2021})=0$.

考点二　无穷小

一、无穷小定义

如果函数f(x)当 $x \to x_0$(或x→ n)时的极限为零 ,那么称函数f(x) 为当 $x \to x_0$(或 x→ n) 时的无穷小 .

【2020数 I】当x→0 时 ,以下函数是无穷小量的是(　　)

A.e^x　　　　B.+1(x + 2)

C.si1x　　　　D.cosx

【答案】C

【解析】A.当 x→0 时 ,$+\mathrm{im}_{x \to 0} e^x=1$;B.当 x→0 时 ,$+\mathrm{im}_{x \to 0}+1(x+2)=+12$;C.当 x→0 时 ,$+\mathrm{im}_{x \to 0}\mathrm{si1}x=0$,正确;D.当 x→0 时 ,$+\mathrm{im}_{x \to 0}\cos x=1$.故选 C.

二、无穷小比较

α、8 都是在同一 自变量的变化过程中的无穷小 ,且 α≠0 ,$+\mathrm{im}\frac{\beta}{\alpha}$ 也是在这个变化过程中的极限 .有结论如下:

1.如果 $+\mathrm{im}\frac{8}{\alpha}=0$,就说 8 是比 α高阶的无穷小 ,记作 8 =o(α);

2.如果 $+\mathrm{im}\frac{8}{\alpha}=n$,就说 8 是比 α低阶的无穷小;

3.如果 $+\mathrm{im}\frac{8}{\alpha}=c\neq 0$,就说 8 与 α是同阶无穷小;

4.如果 $+\mathrm{im}\frac{8}{\alpha}=1$,就说 8 与 α是等价无穷小 ,记作 α~8.

【2017】已知当x→0 时 ,$\wedge\sqrt{1+ax^2}-1$ 与$\mathrm{si1}^2x$是等价无穷小 ,求 a 的值 .

【答案】2

【解析】由题知$+\mathrm{im}_{x \to 0}\frac{\wedge\sqrt{1+ax^2}-1}{\mathrm{si1}^2x}=1$,而$+\mathrm{im}_{x \to 0}\frac{\wedge\sqrt{1+ax^2}-1}{\mathrm{si1}^2x}=+\mathrm{im}_{x \to 0}\frac{\frac{1}{2}ax^2}{x^2}=\frac{a}{2}$, 所以 a =2.

【2018】当x→ 1 时 ,$f(x)=\frac{1-x}{1+x}$与 $g(x)=1-\sqrt[3]{x}$比较 ,会得出什么样的结论?

【答案】$f(x)=\frac{1-x}{1+x}$与 $g(x)=1-\sqrt[3]{x}$是同阶但不等价无穷小 .

【解析】因为$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1-x}{1+x}}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1+x}=\frac{3}{2}$,所以当x→ 1 时 ,

$f(x)=\frac{1-x}{1+x}$与 $g(x)=1-\sqrt[3]{x}$是同阶但不等价无穷小 .

三、常见的等价无穷小的替换

设无穷小 α、β 有 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$,且 $\lim\frac{\beta_1}{\alpha_1}$存在 ,则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta_1}{\alpha_1}.$$

常见的等价无穷小:

当 x→0 时,$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$.

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$;$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x$.

【2021数I】求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3+x^4}{x-\sin x}$.

【答案】6

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3+x^4}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3+x^4}{\frac{1}{6}x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1+x}{\frac{1}{6}}=6$.

【2016】$\lim\limits_{x\to\infty}x^2[\ln(x^2+1)-2\ln x]=$________ .

【答案】1

【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}x^2[\ln(x^2+1)-2\ln x]=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\ln\frac{x^2+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}=\ln e=1$.

【2015】求极限$\lim\limits_{x\to\infty}x^2(e^{\frac{1}{x^2}}-1)$.

【答案】1

【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}x^2(e^{\frac{1}{x^2}}-1)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{1}{x^2}}=1$.

考点三　连续与间断

一、连续的充要条件

$f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

【2021数Ⅰ】函数 $f(x) = \begin{cases} b + 2\cos x, & x<0 \\ 2b+1, & x=0 \\ \dfrac{ax}{\sqrt{1+x}-1}, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求常数 a，b的值．

【答案】$a = \dfrac{3}{2}$, $b=1$

【解析】由题知，由于函数在 $x=0$ 处连续，故 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$，又因为 $f(0) = b+2$，

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (b+2\cos x) = b+2$，

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{ax}{\sqrt{1+x}-1} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{ax}{\frac{1}{2}x} = 2a$，于是 $2a = 2b+1 = b+2$，从而 $a=\dfrac{3}{2}$， $b=1$.

【2021数Ⅰ】已知函数 $f(x) = \begin{cases} (1+ax)^{\frac{1}{x}}, & x>0 \\ 2b-e, & x=0 \\ b+\ln(1+x^2), & x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求实数 a 和 b的值．

【答案】$a=1$，$b=e$

【解析】$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} [b+\ln(1+x^2)] = b$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} (1+ax)^{\frac{1}{ax}\cdot a} = e^a$，$f(0) = 2b-e$，因为连续，所以 $a=1$，$b=e$.

【2021数 Ⅰ】已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-b, x3\,0 \\ 1, x=0 \\ ae^x+b, x<0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，求实数 a，b的值．

【答案】$b=-1$，$a=2$

【解析】由于f(x)在 $x=0$ 处连续，故 $\underset{xt0+}{+im}f(x)=\underset{xt0-}{+im}f(x)=f(0)$，

故 $\underset{xt0+}{+im}(x_2-b)=\underset{xt0-}{+im}(ae_x+b)=1$，从而有 $-b=a+b=1$ 号 $b=-1$，$a=2$.

二、间断点

设函数f(x)在点 x_0 的某去心邻域内有定义．在此前提下，如果函数f(x)有下列三种情形之一：

(1)在 $x=x_0$ 没有定义;

(2)虽在 $x=x_0$ 有定义，但 $\underset{xtx0}{+im}f(x)$ 不存在;

(3)虽在 $x=x_0$ 有定义，且 $\underset{xtx0}{+im}f(x)$ 存在，但 $\underset{xtx0}{+im}f(x)\neq f(x_0)$，

则函数f(x)在点 x_0 为不连续，而点 x_0 称为函数f(x)的不连续点或间断点．

第一类间断点和第二类间断点

如果 x_0 是函数 f(x) 的间断点，且左极限 $f(x_0^-)$ 及右极限 $f(x_0^+)$ 都存在，那么 x_0 称为函数f(x)的第一类间断点．

不是第一类间断点的任何间断点，称为第二类间断点．在这种情况下，左极限 $f(x_0^-)$ 与右极限 $f(x_0^+)$ 中至少有一个不存在．

【2021数 Ⅰ】设 $f(x)=\frac{x+2}{x^2-4}$，则 $x=2$ 是f(x)的(　　)

A.连续点　　B.可去间断点

C.跳跃间断点　　D.无穷间断点

【答案】D

【解析】$x=2$ 时，$x^2-4=0$，分母为零则函数在 $x=2$ 时无定义，由初等函数的连续性可知 $x=2$ 是函数f(x)的间断点，且 $\underset{xt2}{+im}f(x)=\underset{xt2}{+im}\frac{x+2}{x^2-4}=\underset{xt2}{+im}\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}=n$，可知 $x=2$ 是f(x) 的无穷间断点．

【2021数Ⅰ】已知 $f(x)=\frac{x+2}{x^2-x}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的(　　)

A.可去间断点

B.跳跃间断点

C.无穷间断点

D.连续点

【答案】C

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+2}{x^2-x}=\infty$，所以是无穷间断点．

【2020数Ⅰ】点 $x=1$ 是函数 $y=\frac{x-1}{x^2-1}$ 的(　　)

A.连续点

B.可去间断点

C.跳跃间断点

D.无穷间断点

【答案】B

【解析】当 $x=1$ 时，函数无定义，故 $x=1$ 是间断点;又 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$，那么 $x=1$ 是可去间断点，故选 B.

三、零点定理

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号(即 $f(a)\cdot f(b)<0$)，那么在开区间 (a,b) 内至少存在一点 $\in$，使得 $f(\in)=0$.

【2018】方程 $x^3+2x-5=0$ 在下列哪个区间上至少有一个实根(　　)

A.$\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　B.$\left(\frac{1}{2},1\right)$

C.$(1,2)$　　D.$(-1,0)$

【答案】C

【解析】令 $f(x)=x^3+2x-5$，则 $f(-1)=-8<0$，$f(0)=-5<0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{31}{8}<0$，$f(1)=-2<0$，$f(2)=730$，$f(1)f(2)<0$，故在区间 $(1,2)$ 内至少有一个实根．

【2020数 I】设函数f(x)在[0 ,1]上连续 ,且 f(1) =1 ,证明:对任意 入e (0 , 1) ,存在一点∈e (0 ,1) ,使得$f(\in)=\frac{\text{入}}{\in^{2}}$.

【证明】令 $g(x)=x^{2}f(x)-$入,g(0) =-入,g(1) =1 -入,且 入e (0 , 1) ,则 g(1) 30 ,g(0)<0 , g(x)在[0 ,1]连续 ,g(0) .g(1)<0 , 由零点定理可得 ,对任意 入e (0 , 1) ,存在一点 ∈e (0 , 1) , 使得 g(∈)=0 ,即对任意 入e (0 ,1) ,存在一点 ∈e (0 ,1) ,使得$f(\in)=\frac{\text{入}}{\in^{2}}$.

考点四　导数的计算

一、基本求导公式

$C'=0$　　　　$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$

$(a^x)'=a^x\ln a$　　　　$(e^x)'=e_x$

$(+og_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$　　　　$(+1x)'=\frac{1}{x}$

(si1 x)' = cosx　　　　(cosx)' = - si1 x

(ta1 x)' = $\sec^2 x$　　　　(cotx)' = - $\csc^2 x$

(secx)' = secxta1x　　　　(cscx)' = - cscxcotx

(arcsi1x)' = $\wedge\frac{1}{/1-x^2}$　　　　(arcosx)' = $\wedge -\frac{1}{/1-x^2}$

(arcta1 x)' = $\frac{1}{1+x^2}$　　　　(arcotx)' = - $\frac{1}{1+x^2}$

二、函数求导法则

如果函数 α =α(x)及 ⑦=⑦(x)都在点 x具有导数 ,那么它们的和、差、积、商(除分母为零的点外)都在点 x具有导数 ,且

(1) [α(x)土⑦(x)] '=α'(x)土⑦'(x) ;

(2) [α(x)⑦(x)] '=α'(x)⑦(x) + α(x)⑦'(x) ;

(3) $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$(⑦(x)≠0) .

【2021数l]f(x) = 2^x + x + 3 ,则f″ (x) = ________ .

【答案]+1^2 2 .2^x

【解析]f'(x) = +12 .2^x + 1 ,f″ (x) = +1^2 2 .2^x.

【2020数l]$\left(\frac{\cos}{x}x\right)'$ =(　　)

A.si1x　　　　B.-si1x

C. $\frac{x\sin x+\cos x}{x^2}$　　D. $\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}$

【答案】D

【解析】由题知 $\left(\frac{\cos x}{x}\right)'=\frac{x(\cos x)'-x'\cos x}{x^2}=\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}$，故选 D.

【2020数I】$y=x^2+\ln(2x+1)$，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ 的值 .

【答案】$2+\ln 3+\frac{2}{3}$

【解析】$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=2x+\ln(2x+1)+\left.\frac{2x^2}{2x+1}\right|_{x=1}=2+\ln 3+\frac{2}{3}$.

三、复合函数求导

如果 $u=g(x)$在点 x可导，而 $y=f(u)$在点 $u=g(x)$可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点x可导，且其导数为$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x)$ 或 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$.

【2020数I】$f(x)=e^{2x}$，求$f''(x)=$__________ .

【答案】$4e^{2x}$

【解析】$f'(x)=2e^{2x}$，$f''(x)=4e^{2x}$.

四、隐函数求导

隐函数求导方法:

(1)两边同时对 x求导，其中，把 y当做x的函数;

(2)合并含 y'的项，然后移到等式一端；

(3)整理化简，求出y'.

【2021数I】设函数 $y=y(x)$由方程 $e^{x^2y}=x-y$确定，求 y'.

【答案】$y'=\frac{1-2xye^{x^2y}}{1+x^2e^{x^2y}}$

【解析】两边同时求导 $e^{x^2y}(2xy+x^2y')=1-y'$，整理得到 $y'=\frac{1-2xye^{x^2y}}{1+x^2e^{x^2y}}$.

【2020数I】设 $y=y(x)$是由方程 $e^y=x-y$所确定的隐函数，则 $y'=$(　　)

A. e^y+1　　B. $1-e^y$

C. $\frac{1}{e^y+1}$ D. $\frac{1}{1-e^y}$

[答案]C

[解析]方程两边关于 x求导得:$y'e^y=1-y'$,移项合并同类项得:$y'(e^y+1)=1$,解得:$y'=\frac{1}{e^y+1}$, 故选 C.

[2018]求由方程 $x^2+2xy-y^2-2x=0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$的导数 .

[解析]对方程 $x^2+2xy-y^2-2x=0$ 两边同时对 x求导 ,得

$2x+2y+2xy'-2yy'-2=0$,解得 $y'=\frac{2x+2y-2}{2y-2x}=\frac{x+y-1}{y-x}$.

[2017]求由方程 $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 确定的隐函数 $y=y(x)$的导数 .

[答案]$y'=\frac{x+y}{x-y}$

[解析]对方程两边同时对 x求导得，$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2x+2yy'}{2\sqrt{x^2+y^2}}$,化简得

$$\frac{y'x-y}{x^2+y^2}=\frac{x+yy'}{x^2+y^2}\Rightarrow y'x-y=x+yy'\Rightarrow y'=\frac{x+y}{x-y}.$$

五、参数方程所确定的函数求导法则 (数Ⅰ)

设 $y=f(x)$由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 所确定 ,则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

[2019]求曲线 $\begin{cases}x=\frac{t^2}{2}\\ y=t^2(t-1)\end{cases}$ 在 t=2 处的切线方程与法线方程 .

[答案]$y=4x-4$；$y=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{2}$.

[解析]使用参数方程求导方法

$$\frac{dy}{dt}=3t^2-2t=8,\ \frac{dx}{dt}=t=2,\ y'=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=4$$

切线方程:y-4 =4(x-2) ,y=4x-4 ;

法线方程:$y-4=-\frac{1}{4}(x-2)$,$y=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{2}$.

六、洛必达法则

当 x→a 时 ,函数f(x)及 F(x)都趋于零;(2) 在点 a 的某去心邻域内 ,f'(x) 及 F'(x) 都存在且 F'(x)≠0;(3)$+\mathrm{im}_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$存在(或为无穷大) ,那么$+\mathrm{im}_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=+\mathrm{im}_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$.

【2021数 I]计算极限$+\mathrm{im}_{x\to 0}\frac{x\ x^3}{x-\mathrm{ta1}x}$.

【答案] -3

【解析]由洛必达可知$+\mathrm{im}_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\mathrm{ta1}x}=+\mathrm{im}_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\sec^2x}=+\mathrm{im}_{x\to 0}\frac{3x^2}{-\mathrm{ta1}^2x}=+\mathrm{im}_{x\to 0}\frac{3x^2}{-x^2}=-3$.

【2020数I]求极限$+\mathrm{im}_{x\to 0}\frac{e^x+x-1}{2x}$.

【答案]1

【解析]$+\mathrm{im}_{x\to 0}\frac{e^x+x-1}{2x}=+\mathrm{im}_{x\to 0}\frac{e^x+1}{2}=1$.

【2019]求极限$+\mathrm{im}_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{+1\mathrm{si1}x}{(m-2x)^2}$.

【答案] $-\frac{1}{8}$

【解析]使用洛必达法则 .

$$+\mathrm{im}_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{+1\,\mathrm{si1}x}{(m-2x)^2}=+\mathrm{im}_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\cos x}{\mathrm{si1}x}}{2(m-2x)(-2)}=+\mathrm{im}_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1}{\mathrm{si1}x}\ \frac{\cos x}{4(2x-m)}=+\mathrm{im}_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{4(2x-m)}$$

$$=+\mathrm{im}_{x\to \frac{m}{2}}\frac{-\mathrm{si1}x}{8}=-\frac{1}{8}$$

考点五 函数的单调性与极值

一、函数的单调性

设函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导．

1.如果在(a,b)内$f'(x)30$，那么函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上单调增加;

2.如果在(a,b)内$f'(x)<0$，那么函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上单调减少．

【2017】函数$f(x)=\frac{x}{1-x^2}$在区间$(-1,1)$内(　　)

A.单调增加且有界　　B.单调增加且无界

C.单调减少且有界　　D.单调减少且无界

【答案】B

【解析】$f'(x)=\frac{(1-x^2)+2x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$，$xe(-1,1)$时$f'(x)30$，所以单调增加，开区间取不到端点所以无界．

【2020数 I】(数 I&Ⅱ)证明:当$x31$时，$x++1x34\wedge\sqrt{x}-3$.

【证明】令$f(x)=x++1x-4\wedge\sqrt{x}+3$，$x31$;

$$f'(x)=1+\frac{1}{x}-2\frac{1}{\wedge/x}=\frac{1+x-2\wedge\sqrt{x}}{x}=\frac{(1-\wedge\sqrt{x})^2}{x}30,$$

则$f(x)$单调递增，$f(x)3f(1)=0$，即得证．

【2019】(数 I&Ⅱ)证明:当$x30$时，$+1(1+x)3\frac{\text{arcta1x}}{(1+x)}$.

【证明】构造辅助函数

$$f(x)=(1+x)+1(1+x)-\text{arcta1x},(x30),$$

$$f'(x)=+1(1+x)+1-\frac{1}{1+x^2}=+1(1+x)+\frac{x^2}{1+x^2}30$$

故得$f(x)$在$(0,+n)$上单调递增，又因为$f(0)=0$，所以$f(x)30$，即得 $+1(1+x)3\frac{\text{arcta1x}}{(1+x)}$.

二、函数的极值

1.极值的第一充分条件

设函数f(x)在x_0处连续，且在x_0的某去心邻域$\mathring{U}(x_0,6)$内可导．

(1)若x∈(x_0-6,x_0)时，f'(x)≥0，而x∈(x_0,x_0+6)时，f'(x)<0，则f(x)在x_0处取得极大值;

(2)若x∈(x_0-6,x_0)时，f'(x)<0，而x∈(x_0,x_0+6)时，f'(x)≥0，则f(x)在x_0处取得极小值;

(3)若x∈$\mathring{U}(x_0,6)$时，f'(x)的符号保持不变，则f(x)在x_0处没有极值．

2.极值的第二充分条件

设函数y=f(x)在x_0的某个领域内一阶可导，在$x=x_0$处二阶可导，且$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$.

(1)如果$f''(x_0)\geq 0$，则$f(x_0)$为函数的极小值;

(2)如果$f''(x_0)<0$，则$f(x_0)$为函数的极大值．

【2021数I】设k≥0，求函数$f(x)=+1(1+x)+kx^2-x$的极值点，并判断是极大值还是极小值．

【答案】当$0<k<\frac{1}{2}$时，x=0为极大值点，极大值f(0)=0，$x=\frac{1}{2k}-1$是极小值点，极小值$f(\frac{1}{2k}-1)=k-\frac{1}{4k}-+12k$.当$k\geq\frac{1}{2}$时，$x=\frac{1}{2k}-1$为极大值点，极大值$f(\frac{1}{2k}-1)=k-\frac{1}{4k}-+12k$，x=0是极小值点，极小值f(0)=0.当$k=\frac{1}{2}$时，无极值点．

【解析】f(x)的定义域(-1，+n)，$f'(x)=\frac{1}{1+x}+2kx-1=\frac{x(2kx+2k-1)}{1+x}$，

令f'(x)=0，得$x_1=0$，$x_2=\frac{1}{2k}-1$，

列表:

$x(0<k<\frac{1}{2})$	(-1,0)	0	$(0,\frac{1}{2k}-1)$	$\frac{1}{2k}-1$	$(\frac{1}{2k}-1,+n)$
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	7	极大值	↘	极小值	7

列表:

x(k3 $\frac{1}{2}$)	(-1 ,$\frac{1}{2k}$-1)	$\frac{1}{2k}$-1	($\frac{1}{2k}$-1 ,0)	0	(0 , + n)
f' (x)	+	0	-	0	+
f(x)	7	极大值	↘	极小值	7

列表:

x(k= $\frac{1}{2}$)	(-1 ,0)	0	(0 , + n)
f' (x)	+	0	+
f(x)	7	非极值	7

综上 ,当 $0<k<\frac{1}{2}$ 时 ,x=0 为极大值点 ,极大值f(0) =0 ,x=$\frac{1}{2k}$ -1 是极小值点 ,极小值f($\frac{1}{2k}$ -1) =k-$\frac{1}{4k}$-+12k.当 k3$\frac{1}{2}$时 ,x=$\frac{1}{2k}$-1 为极大值点 ,极大值 f($\frac{1}{2k}$ -1) =k-$\frac{1}{4k}$ -+12k,x=0 是极小值点 ,极小值f(0) =0.当 k=$\frac{1}{2}$时 ,无极值点 .

【2020数I】$f(x)=2x^3-3x^2-12x+5$,求极值 .

【答案】极大值为 12 ,极小值为-15

【解析】xeR,

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x^2-x-2)=6(x-2)(x+1)$得驻点为x=-1 和 x=2 ,

列表如下

x	(-n ,-1)	- 1	(-1 ,2)	2	(2 , + n)
f' (x)	+	0	-	0	+
f(x)	增	极大值	减	极小值	增

由表可得 ,极大值为f(-1) =12 ,极小值为f(2) =-15.

【2015】函数f(x)在点 x_0 处可微 ,$f'(x_0)=0$ 是点x_0 为极值点的__________条件 .

【答案】必要

【解析】函数f(x)在点 x_0 处可微 ,且$f'(x_0)=0$,那 x_0 必为函数的极值点;但函数的极值点处不一定导数为 0 ,所以是必要条件 .

考点六　不定积分

一、基本积分公式

$\int k\mathrm{d}x=kx+C$（k是常数）

$\int x^{\mu}\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C\ (\mu\neq -1)$

$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C$

$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x+C$

$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$

$\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$

$\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$

$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\int \sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$

$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=\int \csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C$

$\int \sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$

$\int \csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$

$\int e^{x}\mathrm{d}x=e^{x}+C$

二、不定积分与微分的互逆性

(1)由于 $\int f(x)\mathrm{d}x$是$f(x)$的原函数，所以

$$\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=\frac{d}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\text{ 或 }\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x;$$

(2)由于 $F(x)$是 $F'(x)$的原函数，所以

$$\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C\text{或}\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C.$$

三、不定积分的性质

(1)设函数$f(x)$及 $g(x)$的原函数存在，则$\int [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x.$

(2)设函数$f(x)$的原函数存在，k为非零常数，则$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x.$

【2020数I】不定积分 $\int f'(x)dx=$(　　)

A.$f(x)$　　　　B.$f'(x)$

C.$f(x)+C$　　　　D.$f'(x)+C$

【答案】C

【解析】由积分与微分互逆运算可知 $\int f'(x)dx=f(x)+C$,故选 C.

【2016】设函数$f(x)$,$g(x)$均可导,且同为$F(x)$的原函数,且有$f(0)=5$,$g(0)=2$,则$f(x)-g(x)=$__________.

【答案】3

【解析】因为$f(x)$,$g(x)$同为$F(x)$的原函数,所以$f(x)-g(x)=C$,又有$f(0)=5$,$g(0)=2$,所以$C=5-2=3$,即$f(x)-g(x)=3$.

【2015】若 $\int f(x)dx=xe^{-2x}+C$,其中C为常数,则$f(x)=$(　　)

A.$-2xe^{-2x}$　　　　B.$-2x^2e^{-2x}$

C.$(1-2x)e^{-2x}$　　　　D.$(1-2x^2)e^{-2x}$

【答案】C

【解析】两边求导,得$f(x)=e^{-2x}+xe^{-2x}\cdot(-2)=e^{-2x}-2xe^{-2x}$,所以选 C.

四、凑微分法

设$f(\alpha)$具有原函数$F(\alpha)$,即 $\int f(\alpha)d\alpha=F(\alpha)+C$,$\alpha=\varphi(x)$可导,则有

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int f[\varphi(x)]d[\varphi(x)]=F[\varphi(x)]+C.$$

常见的凑微分的公式:

(1)$dx=\frac{1}{a}d(ax+b)$;　　　　(2)$x^{\mu}dx=\frac{1}{\mu+1}dx^{\mu+1}(\mu\neq-1)$

(3)$\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2d\sqrt{x}$;　　　　(4)$\frac{1}{x^2}dx=-d\frac{1}{x}$;

(5)$\frac{1}{x}dx=d\ln x$;　　　　(6)$e^xdx=de^x$;

(7)$\sin xdx=-d\cos x$;　　　　(8)$\cos xdx=d\sin x$;

(9)$\sec^2xdx=d\tan x$.

【2021数I】计算不定积分 $\int \frac{\sin^2 x\cos x}{1+4\sin^2 x}dx$.

【答案】$\frac{1}{4}\mathrm{si1x}-\frac{1}{8}\mathrm{arcta1}(2\mathrm{si1x})+C$

【解析】

$$\int \frac{\sin^2 x\cos x}{1+4\sin^2 x}dx=\int \frac{\sin^2 x}{1+4\sin^2 x}d(\mathrm{si1x})\xlongequal{令t=\sin x}\int \frac{t^2}{1+4t^2}dt=\frac{1}{4}\int \frac{4t^2+1-1}{1+4t^2}dt=\frac{1}{4}\int\left(1-\frac{1}{1+4t^2}\right)dt=$$

$$\frac{1}{4}\int 1dt-\frac{1}{4}\int \frac{1}{1+4t^2}dt=\frac{1}{4}t-\frac{1}{8}\int \frac{1}{1+(2t)^2}d(2t)=\frac{1}{4}t-\frac{1}{8}\mathrm{arcta1}2t+C=\frac{1}{4}\mathrm{si1x}-\frac{1}{8}\mathrm{arcta1}(2\mathrm{si1x})+C.$$

【2021数I】已知 $\int f(x)dx=F(x)+C$,则 $\int f(3x+2)dx=(\quad)$

A.$F(3x+2)+C$

B.$3F(3x+2)+C$

C.$\frac{1}{2}F(3x+2)+C$

D.$\frac{1}{3}F(3x+2)+C$

【答案】D

【解析】由凑微分法得 $\int f(3x+2)dx=\frac{1}{3}\int f(3x+2)d(3x+2)=\frac{1}{3}F(3x+2)+C.$

【2021数I】求不定积分 $\int \frac{x-3}{x^2+1}dx$.

【答案】$\frac{1}{2}+1(x^2+1)-3\mathrm{arcta1}x+C$

【解析】$\int \frac{x-3}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx^2-\int \frac{3}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}+1(x^2+1)-3\mathrm{arcta1}x+C.$

【2020数I】求不定积分 $\int \frac{1+\ln x}{x}dx$.

【答案】$+1|x+\frac{1}{2}+1^2|x+C$

【解析】$\int \frac{1+\ln x}{x}dx=\int \frac{1}{x}dx+\int \frac{\ln x}{x}dx=+1|x+\frac{1}{2}+1^2|x+C.$

五、分部积分法

设 u =u(x) ,⑦=⑦(x)都具有连续导数 ,则由(u⑦)'=u'⑦ + u⑦',移项得 u⑦'=(u⑦)'-u'⑦,等式两端同时求不定积分得 $\int$ ud⑦=u⑦- $\int$ ⑦du.

分部积分法求不定积分的步骤:

(1)按照反、对、幂、三、指的顺序 ,把排在后面的函数优先凑微分到“d"的后面;

(2)代入公式 $\int ud⑦=u⑦-\int ⑦du$;

(3)解出积分 .

注意:分部积分主要解决的积分是被积函数是两种不同类型函数的乘积 .如 $\int x^2e^xdx$, $\int x\text{si1}xdx$ 等等 .

【2021数I】求不定积分 $\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx$.

【答案】$-\frac{+1(1+x^2)}{x}+2\text{arcta1}x+C$

【解析】$\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx=-\int +1(1+x^2)d\frac{1}{x}=-+1(1+x^2)\cdot\frac{1}{x}+\int\frac{1}{x}d+1(1+x^2)$

$$=-\frac{\ln(1+x^2)}{x}+\int\frac{1}{x}\cdot\frac{2x}{1+x^2}dx=-\frac{\ln(1+x^2)}{x}+\int\frac{2}{1+x^2}dx$$

$$=-\frac{+1(1+x^2)}{x}+2\text{arcta1}x+C.$$

【2015】求 $\int e^{ax}\text{si1}\ bxdx$.

【答案】$\frac{(a\text{si1}bx-b\cos bx)e^{ax}}{a^2+b^2}+C$

【解析】

$$\int e^{ax}\text{si1}\ bxdx=\frac{1}{a}\int \text{si1}bxde^{ax}=\frac{1}{a}(e^{ax}\text{si1}bx-\int e^{ax}d\text{si1}bx)=\frac{1}{a}(e^{ax}\text{si1}bx-b\int e^{ax}\cos bxdx)$$

$$=\frac{e^{ax}\sin bx}{a}-\frac{b}{a^2}\int \cos bxde^{ax}=\frac{e^{ax}\sin bx}{a}-\frac{b}{a^2}(e^{ax}\cos bx-\int e^{ax}d\cos bx)$$

$$=\frac{e^{ax}\sin bx}{a}-\frac{be^{ax}\cos bx}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\text{si1}\ bxdx$$

移项有$\frac{a^2+b^2}{a^2}\int e^{ax}\text{si1}\ bxdx=\frac{ae^{ax}\sin bx-be^{ax}\cos bx}{a^2}$,所以

$$\int e^{ax}\text{si1}\ bxdx=\frac{(a\sin bx-b\cos bx)e^{ax}}{a^2+b^2}+C.$$

考点七 定积分

一、牛顿——莱布尼茨公式

如果函数 F(x)是连续函数f(x)在区间[a ,b]上的一个原函数 ,则

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

【2021数I】求定积分$\int_1^2 e^{\sqrt{x-1}}dx$.

【答案】2

【解析】令$\sqrt{x-1}$ =芒,则 x=芒^2+1,

$\int_1^2 e^{\sqrt{x-1}}dx=\int_0^1 2芒e^{芒}d芒=\int_0^1 2芒de^{芒}=2芒e^{芒}\Big|_0^1-\int_0^1 e^t 2dt=2e-2e^{芒}\Big|_0^1=2.$

【2020数I】求$\int_1^4 \frac{1+\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

【答案】8+12-2

【解析】$\int_1^4 \frac{1+\ln x}{\sqrt{x}}dx=\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx+\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\Big|_1^4+2\int_1^4 \ln x\, d\sqrt{x}=2+2\ln x\sqrt{x}\Big|_1^4$

$-2\int_1^4 \sqrt{x}\frac{1}{x}dx=2+8+12-2\int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}dx=2+8+12-4\sqrt{x}\Big|_1^4=8+12-2.$

二、定积分应用

1.X型面积

若f(x)与 g(x)在区间[a ,b]上连续且 f(x) ≥g(x) ,则在从 a 到 b的曲线 y=f(x) 和 y=g(x)之间的区域的面积为 $A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$.

求 X型平面图形面积步骤:

(1)根据图象找出上曲线f(x)和下曲线 g(x);

(2)根据题目要求和图象交点求得积分限$\int_a^b$;

(3)则面积 $A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$.

2.y型面积

若f(y) 与 g(y) 在区间[c,d] 上连续且 $f(y)\geq g(y)$,则在从 c到 d 的曲线 $x=f(y)$ 和 $x=g(y)$之间的区域的面积为 $A=\int_c^d[f(y)-g(y)]dy$.

求 y型平面图形面积步骤:

(1)根据图象找出上曲线f(y)和下曲线 g(y);

(2)根据题目要求和图象交点求得积分限 $\int_c^d$;

(3)则面积 $A=\int_c^d[f(y)-g(y)]dy$.

3.旋转体体积(数 Ⅰ)

取横坐标 x为积分变量 ,xe [a ,b] ,在[a ,b] 上任取小区间[x,x + dx] ,则以 dx为高的小曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成的薄片的体积微元 $dV=\pi f^2(x)\,dx$, 所以整个旋转体的体积为 $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$.

【2021数 Ⅰ】(数 Ⅰ)求由直线 x=0 ,x=2 ,y=0 和曲线$y=e^x$所围成图形绕 x轴旋转一周所得旋转体的体积 .

【答案】$\frac{1}{2}\pi(e^4-1)$

【解析】$V_x=\pi\int_0^2(e^x)^2dx=\frac{1}{2}\pi e^{2x}\Big|_0^2=\frac{1}{2}\pi(e^4-1)$.

【2021数 Ⅰ】平面直角坐标系上由直线 x=4 ,y=0 以及曲线 $y=\sqrt{x}$围成的平面图形的面积 A=_________ .

【答案】$\frac{16}{3}$

【解析】$A=\int_0^4\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4=\frac{16}{3}$.

【2021数Ⅰ】求 $y=\sin x(\frac{\pi}{4}\leq x\leq\pi)$, $y=\cos x(\frac{\pi}{4}\leq x\leq\frac{\pi}{2})$ 与 x轴围成图形的面积 .

【答案】$\sqrt{2}$

[解析】$S=\int_{\frac{m}{4}}^{\frac{m}{2}}(si1x-cosx)dx+\int_{\frac{m}{2}}^{m} si1xdx=(-cosx-si1x)\Big|_{\frac{m}{4}}^{\frac{m}{2}}-cosx\Big|_{\frac{m}{2}}^{m}=\wedge\sqrt{2}$.

考点八　偏导数与全微分（数 Ⅰ&Ⅰ）

全微分公式: $dz=\frac{az}{ax}dx+\frac{az}{ay}dy$

【2021数Ⅰ】已知函数 $z=f(u,⑦)$可微，而 $u=x\arcsi1y,⑦=\frac{y}{x}$，求 $\frac{az}{ax},\frac{az}{ay}$.

【答案】$\frac{az}{ax}=\arcsi1y f'_1-\frac{y}{x^2}f'_2,\frac{az}{ay}=\frac{x}{\sqrt{1-y^2}}f'_1+\frac{1}{x}f'_2$

【解析】$\frac{az}{ax}=f'_1.\arcsi1y+f'_2.(-\frac{y}{x^2})=\arcsi1y f'_1-\frac{y}{x^2}f'_2,\frac{az}{ay}=\frac{x}{\sqrt{1-y^2}}f'_1+\frac{1}{x}f'_2.$

【2021数Ⅰ】设$f(x,y)=\frac{si1(xy)}{y}$则$\frac{a^2z}{axay}=($　　$)$

A. $-xsi1(xy)$

B. $xsi1(xy)$

C. $-x\cos(xy)$

D. $x\cos(xy)$

【答案】A

【解析】根据题目要求先求解出$\frac{az}{ax}=\frac{y\cos(xy)}{y}=\cos(xy)$，在此基础上求解出$\frac{a^2z}{axay}=-xsi1(xy)$.

【2020数Ⅰ】已知函数 $z=xsi1\frac{y}{x}$，求 $\frac{a^2z}{axay}$.

【答案】$\frac{y}{x^2}si1\frac{y}{x}$

【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}=si1\frac{y}{x}+x(\cos\frac{y}{x})\left(-\frac{y}{x^2}\right)=si1\frac{y}{x}-\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}$,

$\frac{a^2z}{axay}=\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{y}{x}\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2}\frac{y}{x}si1\frac{y}{x}=\frac{y}{x^2}si1\frac{y}{x}.$

【2020数Ⅰ】已知函数 $z=x^2\arcta1(2y)$，则全微分 $dz=$_________ .

【答案】$dz=2x\arcta1(2y)dx+\frac{2x^2}{1+4y^2}dy$

【解析】二元函数的全微分计算公式为:$dz=\frac{az}{ax}dx+\frac{az}{ay}dy$, $\frac{az}{ax}=2xarcta1(2y)$，$\frac{az}{ay}=\frac{2x^2}{1+4y^2}$,则

$dz=2xarcta1(2y)dx+\frac{2x^2}{1+4y^2}dy.$

考点九　二重积分的计算（数 I&I）

1.在直角坐标系直接计算一个二重积分较困难时，可以尝试交换积分次序后计算．

步骤:画图，确定积分次序，确定积分变量范围，计算．

2.(数I)直角坐标转化为极坐标系计算．一般积分区域与圆相关时，利用$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$把直角坐标转换成极坐标计算．$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$.

【2021数I】求$\iint\limits_D(2x+y)\,dxdy$,其中 D是由直线 $y=3$，$y=x$与曲线$xy=1$ 所围成的闭区域．

【答案】$\frac{44}{3}$

【解析】$\iint\limits_D(2x+y)dxdy=\int_1^3 dy\int_{\frac{1}{y}}^{y}(2x+y)dx=\int_1^3\left(2y^2-\frac{1}{y^2}-1\right)dy=\frac{44}{3}$.

【2021数I】计算二重积分$\iint\limits_D(x+2y)\,dxdy$,其中积分区域 D是由直线 $y=x,y=4x$以及曲线 $xy=1$ 围成的平面闭区域．

【答案】$\frac{5}{3}$

【解析】

$$\iint\limits_D(x+2y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{4x}(x+2y)dy+\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_x^{\frac{1}{x}}(x+2y)dy=\int_0^{\frac{1}{2}}(xy+y^2)\Big|_x^{4x}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(xy+y^2)\Big|_x^{\frac{1}{x}}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}18x^2dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(1+\frac{1}{x^2}-2x^2\right)dx=6x^3\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\left(x-\frac{1}{x}-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{5}{3}.$$

【2020数I】计算二重积分$\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)\,dxdy$,其中 D由直线$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$,$y=\sqrt{3}x$与圆$x^2+y^2=\frac{\pi}{2}$所围成的第一象限的闭区域．

【答案】$\frac{\pi}{12}$

【解析]由题知，利用极坐标变换，令 $x=r\cos I, y=r\sin 1 I$;

$$\int_{\frac{m}{6}}^{\frac{m}{3}} dI \int_0^{\sqrt{\frac{m}{2}}} \cos(r^2\sin 1^2 I + r^2\cos^2 I)\, r dr = \int_{\frac{m}{6}}^{\frac{m}{3}} dI \int_0^{\sqrt{\frac{m}{2}}} r\cos r^2 dr = \int_{\frac{m}{6}}^{\frac{m}{3}} dI \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{\frac{m}{2}}} \cos r^2 dr^2 = \int_{\frac{m}{6}}^{\frac{m}{3}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\sin 1 r^2 \Big|_0^{\sqrt{\frac{m}{2}}}\right) dI = \frac{m}{12}.$$

【2020数I]计算二重积分 $\iint\limits_D xydxdy$，其中D是由 $y=x, y=5x, y=-x+6$ 所围成的闭区域．

【答案]23

【解析] $\iint\limits_D xydxdy = \int_0^1 dx \int_x^{5x} xydy + \int_1^3 dx \int_x^{-x+6} xydy = \frac{1}{2}\int_0^1 xy^2 \Big|_x^{5x} dx + \frac{1}{2}\int_1^3 xy^2 \Big|_x^{-x+6} dx$

$$=12\int_0^1 x^3dx + \int_1^3 (-6x^2+18x)dx = 3x^4\Big|_0^1 + (-2x^3+9x^2)\Big|_1^3 = 23.$$

考点十　常微分方程（数 Ⅰ&Ⅰ）

一、可分离变量的微分方程

如果一个一阶微分方程能写成

$$g(y)\,dy = f(x)\,dx$$

的形式，就是说，能把微分方程写成一端只含 y的函数和 dy,另一端只含x的函数和 dx,那么原方程就称为可分离变量的微分方程．

可分离变量的微分方程的解法:

(1)先分离变量，得 $g(y)dy=f(x)dx$;

(2)将上式两端积分，得 $\int g(y)dy=\int f(x)dx$;

(3)设 $G(y)$及 $F(x)$依次为 $g(y)$及$f(x)$的原函数，于是有 $G(y)=F(x)+C$.

【2020数 Ⅰ】微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+\sin x}{e^y}$的通解是(　　)

A.$e^y=x^2+\cos x+C$　　B.$e^y=x^2-\cos x+C$

C.$e^y=x^2+\sin x+C$　　D.$e^y=x^2-\sin x+C$

【答案】B

【解析】$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+\sin x}{e^y}$，分离变量得 $e^y dy=(2x+\sin x)dx$,同时积分得

$\int e^y dy=\int(2x+\sin x)dx$,解得 $e^y=x^2-\cos x+C$,故选 B.

【2021数 Ⅰ】求微分方程 $2ydy-(1+\cos x)(1+y^2)dx=0$ 满足初始条件$y_{x=0}=0$的特解．

【答案】$y^2=e^{x+\sin x}-1$

【解析】由题可知，分离变量得$\frac{2y}{1+y^2}dy=(1+\cos x)dx$,等号两边同时积分得$\int\frac{2y}{1+y^2}dy=\int(1+\cos x)dx$, $\ln|1+y^2|=x+\sin x+C_1$, $|1+y^2|=e^{x+\sin x+C_1}$, $y^2=Ce^{x+\sin x}-1$,将$y_{x=0}=0$ 带入，得，故方程特解为 $y^2=e^{x+\sin x}-1$.

二、一阶线性微分方程

方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0(x)$$

叫做一阶线性微分方程，因为它对于未知数 y及其导数是一次方程 .如果 0(x) =0 ,则方程称为齐次的;如果 0(x)=0 ,则方程称为非齐次的 .

一阶线性微分方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0(x)$的通解为

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int 0(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right).$$

【2020数 I】求微分方程 $y'+y=e^{x}+x$的通解 .

【答案】$y=x-1+\frac{1}{2}e^{x}+Ce^{-x}$

【解析】由题知 $P(x)=1$,$0(x)=e^{x}+x$,则

$$y=e^{-\int 1dx}\left(\int (e^{x}+x)e^{\int dx}dx+c\right)=x-1+\frac{1}{2}e^{x}+Ce^{-x}.$$

【2019】已知函数 $y=y(x)$在任意点处的增量 $Ay=\frac{yAx}{1+x^{2}}+\alpha$,且当 $Ax\to 0$ 时 ,α是 Ax的高阶无穷小 ,若 $y(0)=m$,则 $y(1)=$_________ .

【答案】$me^{\frac{m}{4}}$

【解析】因为 $Ay=\frac{yAx}{1+x^{2}}+\alpha$,所以 $y'=\frac{y}{1+x^{2}}$,用公式 $y=Ce^{-\int p(x)dx}$,解得 $y=Ce^{arcta1x}$

将 $y(0)=\pi$ 带入得 $C=\pi$, $y=\pi e^{\arctan x}$,将$x=1$ 带入得 $y(1)=me^{\frac{m}{4}}$.

三、二阶常系数齐次线性微分方程 (数 I)

求解步骤

(1)微分方程 $y''+py'+gy=0$ 的特征方程为 $r^{2}+pr+g=0$;

(2)求出特征方程为 $r^{2}+pr+g=0$ 的两个根 r_1,r_2;

(3)(i)特征方程有两个不相等的实根:$r_1\neq r_2$,微分方程的通解为

$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$;

(ii)特征方程有两个相等的实根:$r_1=r_2=r$,微分方程的通解为

$y=(C_1+C_2x)e^{rx}$;

(iii)特征方程有一对共扼复根:$r_1=\alpha+8i$、$r_2=\alpha-8i$,微分方程的通解为

$y=e^{\alpha x}(C_1\cos 8x+C_2\text{si}18x)$.

【2021数 I】求微分方程 $y''-4y'+7y=0$ 的通解 .

【答案】$y=e^{2x}(C_1\cos\sqrt{3}x+C_2\sin\sqrt{3}x)$,其中 C_1 ,C_2 为任意常数

【解析】该微分方程对应的特征方程为 $r^2-4r+7=0$,则 $r_{12}=2\pm\sqrt{3}i$,则该微分方程的通解为 $y=e^{2x}(C_1\cos\sqrt{3}x+C_2\sin\sqrt{3}x)$,其中 C_1 ,C_2 为任意常数 .

【2020数 I】微分方程 $y''+7y'-8y=0$ 的通解为(　　)

A.$y=C_1e^{-x}+C_2e^{8x}$　　B.$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-8x}$

C.$y=C_1e^{x}+C_2e^{8x}$　　D.$y=C_1e^{x}+C_2e^{-8x}$

【答案】D

【解析】该方程的特征方程为 $r^2+7r-8=0$,分解因式为$(r-1)(r+8)=0$,解得 $r_1=1$,$r_2=-8$,故原方程的通解为 $y=C_1e^{x}+C_2e^{-8x}$,选 D.

【2019】已知 $y=e^{x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)$(C_1 ,C_2 为任意常数) 是某二阶常系数线性微分方程的通解 ,求对应的方程 .

【答案】$y''-2y+3y=0$

【解析】由通解 $y=e^{x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)$ 得 $\alpha=1$,$\beta=\sqrt{2}$,$\lambda_{12}=1\pm\sqrt{2}i$,进而得特征方程 $\lambda^2-2\lambda+3=0$,得到齐次微分方程 $y''-2y+3y=0$.

考点十一 向量 (数Ⅰ)

一、向量计算

1.向量的坐标表示

设有点 $A(x_1,y_1,z_1)$和点 $B(x_2,y_2,z_2)$,则有$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$;

2.向量的模

向量的大小叫做向量的模 .向量$\overrightarrow{AB}$、$\vec{a}$ 的模依次记作$|\overrightarrow{AB}|$ 、$|a|$.

设向量 $r=(x,y,z)$,则向量模的坐标表示式

$$|r|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

设两点 皿(a_1,b_1,c_1)和 $N(a_2,b_2,c_2)$,则其模为

$$|\overrightarrow{皿N}|=皿\vec{N}=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2}.$$

3.单位向量、负向量、零向量

(1)单位向量:模等于 1 的向量叫做单位向量 .

(2)负向量:与向量a 的模相同而方向相反的向量叫做a 的负向量 ,记作-a.

(3)零向量:模等于 0 的向量叫做零向量 ,表示为 0 ,零向量的方向是任意的 .

4.向量的线性运算

设 $a=(a_x,a_y,a_z)$,$b=(b_x,b_y,b_z)$,则向量的加法、减法以及数乘运算如下:

(1)$a+b=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z)$;

(2)$a-b=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z)$;

(3)$\lambda a=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$;

二、数量积、向量积

1.数量积的向量形式

$$a\cdot b=|a|\cdot|b|\cdot\cos\langle a,b\rangle.$$

当 $a=b$ 时 ,$a\cdot b=a\cdot a=|a|^2\cos0=|a|^2$,即$a^2=|a|^2$.

2.数量积的坐标形式

设 $a=(a_x,a_y,a_z)$，$b=(b_x,b_y,b_z)$，则 $a\cdot b=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

3.数量积的运算规律

(1)交换律 $a\cdot b=b\cdot a$；

(2)分配律 $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$;

(3)结合律 $(\lambda a)\cdot b=\lambda(a\cdot b)$，$\lambda$为数 .

4.向量的夹角

设向量 $a=(a_x,a_y,a_z)$，$b=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\cos I=\frac{a\cdot b}{|a||b|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

5.向量的向量积

设 $a=(a_x,a_y,a_z)$，$b=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$a\times b=c=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)i-(a_xb_z-a_zb_x)j+(a_xb_y-a_yb_x)k.$$

【2021数Ⅰ】向量(1，0，1)与(1，$\sqrt{2}$，1)的夹角为________.

【答案】$\frac{\pi}{4}$

【解析】$\cos I=\frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a||\vec b|}=\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$I=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.

【2020数Ⅰ】已知两点 A(-1，2，0) 和 B(2，-3，$\sqrt{2}$)，则与向量$\overrightarrow{AB}$同方向的的单位向量为________ .

【答案】($\frac{1}{2}$，$-\frac{5}{6}$，$\frac{\sqrt{2}}{6}$)

【解析】向量$\overrightarrow{AB}=(3,-5,\sqrt{2})$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=6$，则与向量$\overrightarrow{AB}$同方向的的单位向量为

$e=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=(\frac{1}{2},-\frac{5}{6},\frac{\sqrt{2}}{6})$.

【2015】设 $\vec a\neq 0$，则与向量 a 同方向的单位向量$\vec e_a$=________ .

【答案】$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

【解析】$\vec{e}_a=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

【2018】设 $\vec{a}=\{1,2,3\}$，$\vec{b}=\{0,1,-2\}$，则$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})$ =________ .

【答案】{14 ,-4 ,-2}

【解析】$\vec{a}+\vec{b}=(1,3,1)$，$\vec{a}-\vec{b}=(1,1,5)$，

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}=14i-4j-2k=\{14,-4,-2\}$$.数

【2017】设 $\vec{a}=\{1,2,3\}$，$\vec{b}=\{0,1,-2\}$，则 $\vec{a}\times\vec{b}=$ ________ .

【答案】$-7i+2j+k$

【解析】$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-7i+2j+k$.

考点十二　平面方程 (数 I)

1.法向量

如果一非零向量垂直于一平面，这向量就叫做该平面的法线向量，平面上的任一 向量均与该平面的法线向量垂直．

2.点法式方程

已知平面 I上一点 N_0 (x_0,$凡_0$,X_0)和它的一个法线向量 n=(V,H,O)，那么平面 I 的方程为 $V(x-x_0)+H(凡-凡_0)+O(X-X_0)=0$.

3.一般方程

平面的一般方程为 Vx+H凡+OX+a=0，其中x,凡,X的系数就是该平面的一个法线向量u 的坐标，即 n=(V,H,O)．

4.特殊的平面的方程

设平面Vx+H凡+OX+a=0则

(1)当 a=0 时，方程 Vx+H凡+OX=0 表示一个通过原点的平面;

(2)当 V=0 时，方程 H凡+OX+a=0，法线向量 n=(0，H,O)垂直于 x轴，表示一个平行于 x轴的平面;同样，方程 Vx+OX+a=0，表示一个平行于 凡轴的平面;

(3)当 V=H=0 时，方程 OX+a=0 或 $X=\frac{a}{O}$, 法线向量 n=(0，0，O)同时垂直 x轴和 凡轴，方程表示一个平行或重合于 xO凡面的平面;同样，方程 Vx+a=0 和 H凡+a=0 分别表示一个平行于或重合于 凡OX面和 xOX面的平面．

【2020数 I】求过点(1，-2，2)且与两平面 x+2凡-X=1 和 2x+凡+3X=2 都垂直的平面方程．

【答案】7x-5凡-3X-11 =0

【解析】由两个平面方程得两个平面的法向量$\vec{u}_1$=(1，2，-1) 和$\vec{u}_2$=(2，1，3)，所求平面的一个法向量为 $\vec{s}=\vec{u}_1\times\vec{u}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$=(7，-5，-3)，由点法式可得平面方程为 7(x-1) -5(凡+2) -

$3(z-2)=0$，整理后为 $7x-5y-3z-11=0$.

【2019】下列各平面中，与平面 $x+2y-3z=6$ 垂直的是(　　)

$2x+4y-6z=1$　　　　B. $2x+4y-6z=12$

C. $\frac{x}{-1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$　　　　D. $-x+2y+z=1$

【答案】D

【解析】平面 $x+2y-3z=6$ 的法向量为 $(1,2,-3)$，平面 $-x+2y+z=1$ 的法向量为 $(-1,2,1)$，$(1,2,-3)\cdot(-1,2,1)=-1+4-3=0$，因为两向量的数量积为 0，所以两条法向量垂直，则两平面垂直，选 D.

【2015】求平行于 y轴且经过点 $(4,0,-2)$，$(5,1,7)$ 的平面方程 .

【答案】$9x-z-38=0$

【解析】设平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，所以有 $\begin{cases}(0,1,0)\cdot(A,B,C)=B=0\\4A-2C+D=0\\5A+B+7C+D=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}A=-\frac{9}{38}D\\B=0\\C=\frac{1}{38}D\end{cases}$，所以平面方程为 $9x-z-38=0$.

考点十三 直线方程 (数 I)

1.空间直线的方向向量

与直线平行的向量叫做直线的方向向量 .

2.空间直线的标准方程

已知直线上一点(x_0,y_0,z_0)和其方向向量 $s=(m,n,p)$,即直线的标准式方程为:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

3.空间直线的参数方程

由直线的对称式方程$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$，令$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=$芒,可得直线的参数方程:

$$\begin{cases}x=x_0+m芒\\y=y_0+n芒\\z=z_0+p芒\end{cases}.$$

4.空间直线的一般方程

空间直线 1可以看作是两个平面m_1 和 m_2 的交线 ,如果两个相交的平面m_1 和 m_2 的方程分别为 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$,那么直线 1上的任一点的坐标应同时满足这两个平面的方程 ,即满足方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases} \quad (1)$$

方程组(1)叫做空间直线的一般方程 .

注:直线的方向向量$s=n_1 x n_2$

【2021数 I】求过点(1 ,0 ,1)且与平面 $x+y-z-1=0$ 和 $2x+z+1=0$ 都平行的直线方程 .

【答案】$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{-2}$

【解析】直线的方向向量为$s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(1,-3,-2)$，所以直线方程为

$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{-2}$.

【2020数 I】平面 $2x-3y+4z=8$ 与直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{4}$ 的位置关系是(　　)

A.平行　　　　B.垂直

C.相交但不垂直　　　　D.直线在平面上

【答案】B

【解析】平面法向量为$(2,-3,4)$，直线方向向量为$(2,-3,4)$，平面的法向量与直线方向向量相等，故直线与平面垂直，选 B.

【2018】直线$\begin{cases} x+y+z-4=0 \\ x-y-z+2=0 \end{cases}$与直线$\begin{cases} x-2y-z-1=0 \\ x-y-2z=0 \end{cases}$的位置关系为________.

【答案】垂直

【解析】直线$\begin{cases} x+y+z-4=0 \\ x-y-z+2=0 \end{cases}$的方向向量$\vec{m}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=2j-2k=(0,2,-2)$;

直线$\begin{cases} x-2y-z-1=0 \\ x-y-2z=0 \end{cases}$的方向向量$\vec{n}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}=3i+j+k=(3,1,1)$;

$\vec{m}\cdot\vec{n}=(0,2,-2)\cdot(3,1,1)=2-2=0$，所以$\vec{m}\perp\vec{n}$，即两直线的位置关系为垂直.

考点十四　幂级数的收敛半径、收敛域 (数I)

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,有$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=p$,(或$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=p$)

若 $p\neq0$,则 $R=\frac{1}{p}$；

若 $p=0$,则 $R=+\infty$;

若 $p=+\infty$,则 $R=0$.

【2021数 I】$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n(n+1)}x^n$ 的收敛半径为__________.

【答案】$\frac{1}{3}$

【解析】$p=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{n(n+1)}{3^n}\right|=3$,$R=\frac{1}{3}$.

【2018】求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛域 .

【答案】[4 ,6)

【解析】对于幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$, 因为$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=1$,所以收敛半径 R=1 ,收敛区间为(-1 ,1) ,当 x=-1 时 , $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 由莱布尼尼兹定理可判断其收敛;当 x=1 时 , $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$,而$\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\frac{1}{n}$,调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散 ,所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散 .所以幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$的收敛域为[-1 , 1）.

那么对于幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$,则有$-1\leq x-5<1$,解得 $4\leq x<6$,即收敛域为[4 ,6) .